De boeken van Uitgeverij Nieuwezijds zijn verkrijgbaar in de boekhandel en via www.nieuwezijds.nl.

Een cultuurgeschiedenis van de wiskunde

Redactie

MACHIEL KEESTRA

UITGEVERIJ NIEUWEZIJDS

Uitgegeven door: Uitgeverij Nieuwezijds, Amsterdam
Zetwerk: Holland Graphics, Amsterdam

ISBN 978 90 5712 136 4
NUR 738

Voorwoord

Dit boek werd voorafgegaan door twee eerdere boeken met hoofdstukken die gebaseerd waren op lezingenreeksen voor CREA-Studium Generale van de Universiteit van Amsterdam, georganiseerd door ondergetekende. Die boeken waren *Tien westerse filosofen* (2000) en *Doorbraken in de natuurkunde* (2001). De structuur van die boeken kwam erin overeen dat de hoofdstukken gewijd waren aan een specifieke auteur en diens werk, terwijl de auteurs gekozen waren uit het geheel van de westerse filosofie- respectievelijk natuurkundegeschiedenis. Hoewel dat voor de filosofie lastiger bleek dan voor de natuurkunde, was het de bedoeling dat een auteur niet alleen met het oog op zijn eigen specifieke bijdrage werd behandeld, maar dat die auteur in zekere zin ook representatief was voor een bepaalde periode of positie in de ontwikkeling van de betreffende discipline.

In mijn voorwoord van het natuurkundeboek verwees ik kort naar het feit dat een boek over de biologie een andere structuur zou hebben en niet historisch geordend zou zijn, noch gerangschikt volgens belangrijke auteurs. Ik noemde daarvoor de reden dat de biologie als wetenschap pas relatief recent echt tot bloei is gekomen en dat er te weinig herkenbare auteurs geweest zijn om deze ontwikkeling aan op te hangen. Blijkbaar vergaat het de filosofie en natuurkunde anders in hun ontwikkeling en dragen invloedrijke auteurs daar zodanig bij aan de systematische ontwikkeling van hun vak, dat hun bijdragen ook later nog van belang blijven – en dan niet slechts van historisch belang.

Voor de onderhavige cultuurgeschiedenis van de wiskunde was het goed mogelijk om weer een historische indeling te kiezen, die volgens mij didactisch grote voordelen biedt. Op die manier kan de lezer enigszins geestelijk voltrekken wat het algemene verloop van probleemstellingen en antwoorden in de ontwikkeling van de wiskunde is geweest. Bovendien kan op die manier eenvoudiger worden verklaard welke niet-wiskundige omstandigheden aanleiding hebben gegeven tot bepaalde ontwikkelingen in de wiskunde. De keuze voor een historische systematiek bleek dus wel verantwoord, maar om daarbij per tijdvak slechts één individu te kiezen dat in sterke mate had bijgedragen aan de ontwikkeling van het gehele vak, bleek vrijwel onmogelijk. Natuurlijk is er in de geschiedenis van de wiskunde wel een aantal personen aan te wijzen dat bijzonder invloedrijk is geweest, maar vaker blijken er in een bepaalde periode meerdere kandidaten te zijn. Dit heeft wellicht ook te maken met het feit dat de wiskunde al vroeg onderverdeeld kan worden in een aantal subdisciplines, zoals de meetkunde en de rekenkunde, die ook min of meer zelfstandige ontwikkelingen doormaken. Hoewel tot een aantal eeuwen geleden het voor auteurs mogelijk bleek om alle subdisciplines te overzien en eraan bij te dragen, is er toch ook vaak sprake van een zekere specialisatie. Vandaar dat in een en dezelfde periode meerdere auteurs van groot belang kunnen zijn. Deze omstandigheden hebben ertoe geleid dat voor dit boek gekozen is voor een grove indeling in historische periodes, waarbij meerdere personen de revue kunnen passeren.

Anders dan in de andere twee boeken is dit boek niet uitsluitend gewijd aan de westerse (lees Europese) ontwikkelingen, van de Griekse oudheid tot heden. Ten aanzien van de filosofie en natuurkunde was dat ingegeven door de overtuiging dat – ongeacht de boeiende ontwikkelingen van filosofische of natuurkundige aard in andere windstreken – voor een goed begrip van de ontwikkeling van de hoofdzaken van de hedendaagse filosofie of natuurkunde, de kennis van die ontwikkelingen elders niet wezenlijk is. Weliswaar is de Renaissance en daarmee de herontdekking van veel van de antieke geschriften en de ontwikkeling van het humanisme en dergelijke zaken, meer in belangrijke mate te danken aan de rol die Arabische auteurs gespeeld hebben bij het bewaren en interpreteren van die antieke geschriften. Die rol is toch vooral van historisch belang geweest en bestaat niet zozeer uit een systematische bijdrage in de zin van het ontwikkelen van geheel nieuwe begrippen of methodes. In dit boek is echter wel een hoofdstuk dat aandacht besteedt aan de Indiase en Arabische wiskunde. Daarin wordt beschreven hoe buiten Europa niet alleen met verwante wiskundige problemen werd geworsteld, maar dat daar bovendien andere concepten of methodes werden ontwikkeld die na introductie in Europa wezenlijk hebben bijgedragen aan de ontwikkelingen.

Bij dat alles is vanzelfsprekend nog steeds geen volledigheid bereikt, noch geografisch, noch historisch, noch systematisch. Er zijn vele onderwerpen en auteurs te bedenken die het verdiend hadden om ook in dit boek te worden behandeld. Desalniettemin krijgt men hopelijk enigszins een indruk van belangrijke onderwerpen uit de wiskunde en de wijze waarop die ontwikkeld werden. Daarbij is het de bedoeling dat de lezer op twee manieren een gevoel krijgt voor die wiskundige onderwerpen: zowel door middel van een bescheiden 'historische sensatie' van de omstandigheden waarin wiskundige problemen behandeld werden, als door middel van systematische uitleg van die problemen zelf. Soms zijn die problemen dermate specialistisch dat ze slechts in beperkte mate uitgelegd kunnen worden, soms is ervoor gekozen om die uitleg af te zonderen. Dit boek is in elk geval bedoeld voor lezers met een beperkte wiskundige bagage en niet speciaal voor wiskundigen of studenten wiskunde. Gezien het feit dat wiskunde niet alleen de wetenschap maar ook het leven van alledag doordrenkt, is het van belang dat ook leken een indruk kunnen krijgen van de soort problemen en methodes die in de wiskunde spelen.

Ten slotte wil ik nog kort stilstaan bij de aanloop naar dit boek. De lezingen die aan dit boek ten grondslag lagen, zijn reeds enkele jaren geleden gehouden. Alleen de hoofdstukken van Hogendijk en Keestra zijn niet voortgevloeid uit de lezingenreeks, maar geschreven om althans een aantal lacunes van die reeks op te heffen. Dat de andere teksten wel gebaseerd zijn op lezingen maakte het schrijfwerk niet veel eenvoudiger, omdat het omwerken van een lezing tot een hoofdstuk van een boek geen geringe opgave is. Bovendien wordt een publicatie als dit niet gerekend tot de primaire taken van wetenschappelijk medewerkers – hoezeer de gemiddelde belastingbetaler eerder dit boek dan een wetenschappelijk tijdschrift ter hand zal nemen – en geldt het werk hieraan veelal vrijetijdsarbeid. Belangrijke tegenslag vormde het verdrietige overlijden van Albert Grootendorst, die de antieke wiskunde voor zijn rekening had genomen. Hoewel reeds jaren met emeritaat, was Grootendorst nog zeer actief, zowel in onderwijs als met publiceren. Met zijn karakteristieke, heldere stem en een zeer beeldende manier van uitleggen – waarin hij duidelijk plezier had – gaf zijn lezing niet alleen een grondige indruk van de variatie in de antieke wiskunde, maar ook een indruk van het ontstaan van wiskundige problemen en methodes en hun doorwerking op latere ontwikkelingen. Grootendorst had de laatste jaren zijn handen vol aan een aantal indrukwekkende publicaties, waarin hij het werk *Elementa Curvarum Linearum* van de raadspensionaris en wiskundige Johan de Witt (1625-1672) in vertaling en voorzien van commentaar bezorgde. Desalniettemin zag hij toch kans een eerste versie te schrijven van het tweede hoofdstuk voor dit boek. Het omwerken van de tekst aan de hand van redactionele aanwijzingen is hem echter niet meer gelukt: helaas overleed hij toch nog vrij onverwachts in december 2004. Na enig overleg bleek Jan van Maanen bereid om de tekst van Grootendorst tot een goed leesbare en begrijpelijke tekst te bewerken, hetgeen hij op een voortvarende manier gedaan heeft. Bovendien gaf Albert Grootendorst jr. grootmoedig toestemming om de bijdrage van zijn vader in een zodanige bewerking te publiceren, waarvoor wij hem zeer erkentelijk zijn.

Grootendorst sr. was voor Van Maanen een ‘vriend op afstand’ en collega: een collega die opponeerde bij Van Maanens promotie, met wie hij samen heeft gepubliceerd over een Nederlandse wiskundige en samen cursussen gegeven heeft. Meer dan vele anderen heeft hij ervaren hoezeer Grootendorst op een beminnelijke en betrokken wijze hart voor de mensen in zijn omgeving, voor onderwijs en onderzoek en niet op de laatste plaats voor de wiskunde had. Zeker wanneer het om een combinatie daarvan ging – enthousiasmerend onderwijs in de wiskunde en haar geschiedenis – was Grootendorst nauwelijks een moeite te groot. Hopelijk kan dit boek enigszins de inspiratie en het enthousiasme van Grootendorst overbrengen op zijn lezers.

Het zal duidelijk zijn dat sommige hoofdstukken eerder klaar waren dan andere. Alle auteurs geldt mijn dank voor hun inspanningen, sommige auteurs hebben bovendien ook langere tijd moeten wachten tot hun werk het daglicht kon zien. Voor hun geduld en vertrouwen verdienen zij extra waardering. Daarnaast wil ik Jan van Maanen en Albert Grootendorst jr. speciaal bedanken, zonder wie de tekst van Grootendorst niet in deze vorm had kunnen verschijnen. Dank verdient tenslotte ook uitgeverij Nieuwezijds, die in het boek is blijven vertrouwen.

Machiel Keestra

Inhoud

Inleiding

Machiel Keestra

Hoezeer een hedendaagse lezer dat ook mag verwonderen, overzichten van de westerse geschiedenis van de filosofie, de wiskunde, de natuurkunde of van de wetenschap beginnen in het algemeen bij de Ionische natuurfilosofen. Zijn wij doordrongen van de grote verschillen in inhoud en methode van de filosofie of de wiskunde of de natuurkunde, blijkbaar bestonden er aanvankelijk zodanige overeenkomsten dat zij hetzelfde beginpunt kennen. Vanzelfsprekend gaat het hier niet over het beginpunt van het denken over betekenis of het beschouwen van de natuur of het rekenen – dat soort activiteiten werden natuurlijk al in oudere en niet-Griekse culturen uitgeoefend. Mythologieën, astronomische tabellen en boekhoudkundige berekeningen zijn ons in onder andere hiërogliefen en spijkerschrift overgeleverd uit Egypte, Babylonië en andere gebieden. Al duizenden jaren wisten gemeenschappen water buiten de dijken te houden, oogsten spaarzaam te gebruiken, grote legers te verplaatsen en onderhouden.

Toch gebeurt er iets opmerkelijks in de zesde eeuw voor onze jaartelling, aan de Ionische kust van het huidige Turkije. Daar bevonden zich Griekse gemeenschappen, koloniën, die zich aan de periferie van de Griekse wereld bevonden en zo ook in directer contact stonden met de Egyptische en Babylonische beschavingen en hun geschiedenis. Wellicht is het te danken aan dat kruispunt van intellectuele wegen, dat de Ioniërs ertoe kwamen om een andere manier van beschouwen, van kennisordening, te gaan ontwikkelen. Als Grieken waren zij natuurlijk vertrouwd met de homerische en hesiodische mythologieën, waarin goden verantwoordelijk waren voor het wel en wee van de mensenwereld, maar ook voor het ontstaan en de ordening – kosmos – van de wereld als geheel. Hesiodos had die ordening zelfs nog een stuk systematischer gemaakt dan Homeros door een chronologie aan te brengen, zodat de ogenschijnlijke wirwar aan goden tot een redelijk nette stamboom bleek te kunnen worden gereduceerd. Als Ioniërs maakten zij echter ook kennis met geheel andere mythologieën en godenwerelden. Sterker nog: Herodotos, vader van de geschiedschrijving en eveneens afkomstig uit Ionië, betoogde dat de Griekse godenwereld grotendeels ontleend is aan de Egyptische. Hij hanteert een misplaatste etymologie om de theologie te verklaren vanuit een behoefte aan thesis: ordening en vaststelling. Ordenen en vaststellen gebeurde in Egypte en omstreken natuurlijk niet alleen door middel van godenverhalen, maar ook met gebruik van allerhande rekenmethoden en tabellen. De Ionische bevolking zal daarmee evenzeer in aanraking gekomen zijn als met die verschillende godenverhalen. Herodotos' verhalende en vergelijkende geschiedenissen zijn misschien wel illustratief voor de omgang met al die invloeden door de enigszins beschouwelijk ingestelde Ioniërs: overeenkomsten, verschillen en onderliggende structuren vragen er bijna om ontdekt te worden. Bovendien doemt dan ook de vraag op naar de verklaring van de ogenschijnlijke verscheidenheid. Een vraag die niet meer met weer een andere mythologie beantwoord kan worden, omdat juist de variatie aan godenverhalen aanleiding gegeven had tot enige scepsis.[1] Een vraag die dus om een ander soort antwoord vraagt. Een vraag die zich eerder opdrong op het grensvlak tussen culturen dan in het behaaglijke centrum van een polis als Athene.

Thales van Milete wordt wel de eer gegund om als eerste een wetenschappelijke manier van vragen en antwoorden ontwikkeld te hebben. Weliswaar dateren onze bronnen uit een paar eeuwen na zijn dood, maar de overgeleverde ideeën en activiteiten van Thales maken hem in elk geval tot een geschikte kandidaat. Zijn voor ons theorie en praktijk (en zoals we verderop in dit boek zullen zien: zuivere en toegepaste wiskunde) veelal gescheiden zaken en zijn wij geneigd om disciplinair te denken, voor Thales waren dat soort grenzen nog niet aan de orde. In elk geval wordt over hem verteld dat hij zich bezighield met het verleggen van een rivier, het voorspellen van een zonsverduistering (in 585 v. Chr.), het speculeren met olijvenpersen

– hetgeen hem een fortuin opleverde –, het ontwikkelen van nieuwe afstands- en hoogtemetingen, het construeren van geometrische bewijzen, het verklaren van aardbevingen en het vervaardigen van een invloedrijk wijsheidsgeschrift. Een indruk van zijn werkwijze krijgen we wellicht uit zijn antwoord op de vraag wat oorsprong en doel van alles is – de vraag naar de meest fundamentele aard van de werkelijkheid. Volgens Thales bestaat die oorsprong en doel uit water – waarin hij overeenstemt met Homeros' visie dat Okeanos de oorsprong van de goden is (zie Homeros' *Illias* 14, p. 201).

Thales geeft echter geen oorsprongsmythe, maar maakt plausibel waarom water het gezochte 'principe' is en hanteert daartoe een aantal afgeleide verklaringen. Zo ontstaan volgens hem de dingen uit water wanneer dat vast wordt, bevriest en vergaan ze weer wanneer het ijs weer vervloeit. Bovendien verklaart het drijven van de aarde en van dingen op water ook het voorkomen van aardbevingen. Tenslotte zijn alle dingen net als de natuur veranderlijk en beweeglijk vanwege hun oorsprong, hun 'principe': water. Door het hanteren van een gelijknamige noemer voor alle dingen kon hij ze met elkaar in één structuur onderbrengen. Zo mat Thales de hoogte van de piramiden, door op het moment dat onze schaduw net zo groot is als wij zelf zijn ook de lengte van de schaduw van de piramiden te meten. Door af te zien van de opvallende uiterlijke verschillen tussen onszelf en piramiden, door de overeenkomsten in geometrische aspecten te onderkennen en door gebruik te maken van de oneindig grote afstand tot de zon (waardoor het positieverschil tussen een piramide en een mens verwaarloosbaar is) kon hij een driehoek van dezelfde verhoudingen ontdekken. Het hanteren van een principe in verschillende gestalten – water in verschillende fases – om een bonte verscheidenheid aan feiten in een klap te verklaren, blijkt zo overeenkomsten te hebben met het gebruik van geometrische verhoudingen om bepaalde overeenkomstige eigenschappen van verschillende objecten te leren kennen.

De ontwikkeling van de natuurfilosofie en wetenschap vindt plaats door enerzijds een toenemende verheldering en systematiek van begrippen, anderzijds door een toenemende interesse in het gebruik van de wiskunde hierbij. Niet alleen moeten zoveel mogelijk verschijnselen door zo eenvoudig mogelijke verklaringen met zo min mogelijk principes kunnen worden beschreven. Als het even kan, moeten in die beschrijvingen ook wiskundige elementen worden gehanteerd. Iets dergelijks zien we dan ook bij de Ioniër die meestal na Thales als grondlegger van de wetenschappen genoemd wordt en bovendien diens leerling was: Anaximander. Niet alleen komt bij hem als principe in de plaats van water het ‘oneindige’ ter sprake, dat naast een theologisch ook een wiskundig aspect bezit. Bovendien gebruikt hij verschillende geometrische figuren om het heelal te beschrijven, waarbij hij er niet voor terugdeinst om grootteverhoudingen aan te geven. Zo is de zonnecirkel volgens hem 27 keer zo groot als de aardbaan en doet hij uitspraken over de relatieve posities van dergelijke banen. Daarmee blijkt onmiddellijk het voordeel van een dergelijke beschrijving: vormen en afmetingen of verhoudingen zijn door anderen te controleren, zodat de ideeën goed te weerleggen of bevestigen zijn. Dit geldt natuurlijk minder voor het veronderstelde principe van de kosmos, dan voor de getalsverhoudingen tussen verschillende onderdelen van die kosmos.

Zo is hier al zichtbaar, dat natuurfilosofie en wiskunde misschien wel deel uitmaken van een zelfde poging om structuur en eenvoud aan te brengen in de verscheidenheid van de werkelijkheid, maar dat natuurfilosofie en wiskunde verschillen in hun mogelijkheden en resultaten. Conceptueel kunnen relaties gelegd worden die betekenisvol kunnen zijn zonder dat we ze altijd volledig kunnen preciseren, terwijl we wiskundige verhoudingen meestal precies kunnen bepalen maar daarbij meestal een zeer beperkte kennis opdoen. In de volgende hoofdstukken van dit boek zullen we onder andere ontdekken dat de ontwikkeling van de wiskunde zelf ook voortgedreven werd door zowel een interesse in fundamentele structuren als een drang naar praktisch toepasbare nauwkeurigheid.

Die verschillende interesses blijken echter conceptueel ook verschillende eisen te stellen. Dit kan misschien worden vergeleken met het feit dat er verschillende kaarten beschikbaar zijn van een en hetzelfde gebied en dat onze keuze voor een bepaalde schaal afhankelijk is van het gebruik dat we ervan willen maken. Voor een automobilist is een andere kaart bedoeld dan voor een wandelaar of een geoloog. Die kaarten verschillen niet alleen in schaal en detaillering, maar ook in de markering van wegen, herkenningspunten, gemeentegrenzen, aardlagen, enzovoorts. Het is duidelijk dat er geen enkele kaart kan worden vervaardigd die op gelijke wijze alle gegevens bevat: of het zou wellicht een duplicaat op schaal 1:1 van het gebied zelf moeten zijn.

Niet toevallig wordt van Anaximander gezegd dat hij als eerste bedacht had om de aarde af te beelden en daarbij de omtrek van water en land te markeren.[2] Deze metafoor van de kaartenmaker kan blijkbaar helpen om het werk van wetenschappers en wiskundigen te verhelderen. Dezelfde metafoor komt dan ook ter sprake in het eerste hoofdstuk. Hier gaat Machiel Keestra onder andere in op de relatie tussen de aard van het wiskundige object en de toepassing van de wiskunde voor het verkrijgen van kennis van de werkelijkheid. Aan de hand van de klassieke filosofen Plato en Aristoteles schetst hij verschillende opvattingen van het wiskundige object. Daarbij blijken zeer uiteenlopende vragen met elkaar samen te hangen: hoe komen wij eigenlijk aan ons begrip van het getal of van de geometrische vorm? Zijn dat getal en die vorm ondergebracht in een bepaald domein van de werkelijkheid – tussen de zintuiglijk waarneembare, stoffelijke objecten en de abstracte ideeën in? Of, en dat is meer Aristoteles' opvatting, ontlenen we getal en vorm middels een proces van abstractie aan die zintuiglijke waarnemingen? Creëert onze geest als het ware die objecten, waarvoor we vervolgens sluitende definities proberen te geven en ze proberen onder te brengen in een complex axiomatisch systeem? Duidelijk wordt bij deze vergelijking dat de twee denkers niet alleen een ander soort inzicht of kennis van die objecten poneren, maar dat die objecten ook een andere bestaanswijze hebben. Dat heeft vervolgens ook zijn weerslag op het gebruik dat we van die kennis kunnen maken. Als de bron van onze wiskundige kennis veraf staat van de bestaanswijze van zintuiglijk waarneembare objecten, dan is het maar de vraag of die kennis ons wel iets kan leren over die zintuiglijk waarneembare werkelijkheid. Waaruit zou die relatie moeten bestaan? Aristoteles lijkt in dit opzicht een stap verder te willen zetten en brengt de daarvoor genoemde abstractie in het spel. Die abstractie herleidt onze aanraking met wiskundige objecten tot de waarneming van die werkelijkheid. Omdat Aristoteles echter besefte dat de wiskundige waarheid niet afhankelijk van en beperkt mag blijven door de onbetrouwbare waarnemingen, heeft hij ten aanzien van de wiskunde als wetenschap een andere route bedacht. De axiomatisch-deductieve bewijsmethode, vooral bekend vanwege *De Elementen* van Euclides, werd door Aristoteles ontwikkeld en ook voor de wiskunde bedacht. Hoewel we cirkels hebben leren kennen en herkennen vanuit de waarneming, kunnen we volgens deze axiomatische methode een strenge definitie van de cirkel geven en daarmee vervolgens allerlei constructies en berekeningen uitvoeren.

Daarmee lijkt hij de relatie tussen waarneembare werkelijkheid en wiskunde gegarandeerd te hebben. Toch blijft de rol van de wiskunde in zijn ogen beperkt tot de stoffelijke, ruimtelijke kant van de dingen. Omdat Aristoteles van mening was, dat werkelijke kennis betrekking had op het wezen van de dingen – dat ook in definities vastgelegd zou moeten worden – kon volgens hem de wiskunde nooit wezenlijke kennis van de werkelijkheid opleveren. Een echte mathematische natuurwetenschap bleef daardoor buiten zijn bereik. Om die te bereiken was nog een conceptuele stap nodig.

Die stap werd onder andere genomen door de middeleeuwse kardinaal Cusanus. Hier komt die kaartenmaker ter sprake. Cusanus beschrijft een proces van toenemende verfijning van een getekende wereldkaart, waarbij de kaartenmaker vertrouwt op de informatie die zijn zintuigen bieden. De verstandelijke verwerking van die gegevens is echter bovendien een soort tegenhanger van de productieve geestelijke vermogens van de Schepper: de kaart en de geschapen werkelijkheid staan dus in een directe verhouding met elkaar. Deze visie van Cusanus maakt plausibel dat onze empirische kennis direct gerelateerd kan zijn aan de werkelijkheid en verdedigt bovendien het nut van niet geheel nauwkeurige of volledige kennis. Welhaast vooruitlopend op het Popperiaanse streven naar steeds grotere 'Verisimilitude' of waarheidsbenadering, bestaat Cusanus' idee van wetenschap uit een proces van toenemende kennisverfijning. Waarheid, als een volmaakte overeenstemming tussen onze kennis en de werkelijkheid, mag dan misschien onbereikbaar zijn, een toenemende gelijkenis – similitudo – blijkt meestal zeer bruikbaar te zijn.

Hierboven was al even sprake van de bewijsmethode die door Euclides' werk zo bekend geworden is. In het hoofdstuk 'Enkele aspecten van de wiskunde in de Griekse oudheid' – dat bewerkt en afgerond werd door Jan van Maanen – wijst Albert Grootendorst erop, dat naast hun interesse in het bewijs, de Grieken zich ook richtten op verschillende procedures om wiskundige objecten te construeren. Bedoeling van de auteur is juist het gangbare beeld van die antieke wiskunde aan te vullen. Vanwege de invloed van Euclides' *Elementen*, tot in het moderne wiskundeonderwijs aan toe, is het beeld ontstaan van een uniforme wiskunde. Maar net zoals er verschillende opvattingen over wiskundige objecten waren, zo waren er ook verschillende methoden. Men ging destijds beslist niet uitsluitend streng axiomatisch en deductief te werk, maar hanteerde daarnaast andersoortige constructieve methoden. Daarbij gaat het niet meer om het afleiden van steeds complexere figuren uit definities, maar om het opbouwen van zulke figuren met simpele middelen.

Niet alleen de bekende liniaal en passer van Euclides om geometrische figuren te construeren, maar ook het gebruik van steentjes die in allerlei figuren gelegd werden, bleek productief voor het formuleren en oplossen van wiskundige problemen. Zo konden sommige getallen – priemgetallen bijvoorbeeld – of getalsverhoudingen onderzocht worden door steentjes in bepaalde figuren te leggen. Een voordeel van deze steentjesarithmetiek is het aanschouwelijke karakter ervan. Die aanschouwelijkheid bleek echter grote beperkingen te hebben, getuige de consternatie die de ontdekking van niet-natuurlijke getallen opleverde. Die waren niet meer te construeren volgens deze methode en bovendien leken ze een exacte bepaling van uitkomsten in de weg te staan. Ondanks dit soort bezwaren en de omslachtigheid maakten Johan de Witt en Newton in de zeventiende eeuw nog gebruik van combinaties van meetkunde en getaltheorie die geïnspireerd waren door Griekse voorbeelden.

De Griekse wiskunde lijkt zo geleid te worden door een aantal uitgangspunten, sommige in relatie tot de constructieve principes, sommige in relatie tot de resultaten van berekeningen. Zo werd door Euclides voorgeschreven dat figuren geconstrueerd moesten worden met passer en liniaal. Dat leidde soms tot ingewikkelde procedures, terwijl sommige meetkundige problemen zich met die middelen zelfs geheel niet lieten oplossen. Toch werd de zogenaamde 'neusis-constructie', die soms een simpeler of effectievere oplossing kon bieden, door velen – waaronder Plato en Euclides – afgewezen. Het feit dat voor deze constructie een liniaal niet direct gebruikt kon worden maar moest worden voorzien van een aantal merktekens en een scharnierpunt, vond geen genade in hun ogen. De vaak genoemde 'elegantie' als een karakteristiek van een fraai wiskundig bewijs kreeg zo de voorkeur boven de effectiviteit. Toch was juist de veelzijdige en belangrijke wiskundige en ingenieur Archimedes iemand die zich niet liet beperken door genoemde uitgangspunten, die soms bepaalde constructiewijzen en exactheid voorschreven in plaats van pragmatische oplossingen. Het is dan ook niet verwonderlijk dat hij die neusis-constructie wel graag gebruikte. Het behandelde voorbeeld, dat een meetkundig probleem oplost met behulp van een mechanische benadering, laat dat fraai zien: een verrassende voorstellingswijze, een onnauwkeurig resultaat en pas achteraf voegde Archimedes een streng bewijs toe. De erfenis van de Griekse wiskunde is dan ook een zeer gevarieerde: enerzijds streng constructief en bewijzend, maar anderzijds toch ook pragmatisch en vindingrijk. Ook verderop in dit boek zullen we die twee kanten van de medaille tegenkomen, soms onderscheiden als 'zuivere' en 'toegepaste' wiskunde.

Dat toegepaste wiskunde vernieuwend kan zijn terwijl nauwkeurigheid daarbij niet wezenlijk is, blijkt al meteen in het eerste deel van het hoofdstuk 'Indiase en Arabische wiskunde', waar Jan Hogendijk ingaat op de astrologie. Toegepaste wiskunde vinden we voor de Oudheid namelijk vooral terug in die astrologie. Op basis van jarenlang verzamelde gegevens ontwikkelden de Babyloniërs rekenmethoden die tot voorspellingen moesten kunnen leiden. Mathematisering van natuurverschijnselen is dus niet slechts een methode die in de moderne westerse wetenschap beoefend werd. Anders dan de Babyloniers hadden de Grieken aanvankelijk meer interesse in astronomische modellen en minder in de berekening van voorspellingen. Dat de Griekse erfenis wel uit twee verschillende tendensen lijkt te bestaan, blijkt ook uit het vervolg: vanaf het jaar 200 bloeide de sterrenkunde op, terwijl de zuivere wiskunde weer verdween. De modellen werden aangepast aan de planeetbewegingen die ermee beschreven moesten kunnen worden. Belangrijke figuur was toen Hipparchus, die als het ware de voorspellende, Babylonische wiskunde combineerde met Griekse meetkundige modellen. Daarbij gebruikte hij de irrationele getallen die zijn voorgangers nog zo sterk hadden afgewezen. Door deze combinatie was het mogelijk om modellen op te stellen en vervolgens – aan de hand van waarnemingen – te controleren of de voorspellingen klopten: een belangrijke vooruitgang, waarbij toepassingen leidend waren.

Ook in India bleken levensbeschouwelijke of religieuze opvattingen bij te dragen aan de ontwikkeling van de wiskunde. Vaak ging het ook daar om wiskunde in dienst van de astrologie. Maakten de Grieken gebruik van de Babylonische erfenis, de Indiase sterrenkunde is weer een mix van die beide erfenissen met de oudere Indiase kosmologie. Wiskunde wordt in de Middeleeuwen in India voornamelijk ten dienste van de sterrenkunde gepraktiseerd. Ons decimale positiestelsel hebben we aan die wiskunde te danken.

Net als elders wordt ook de Arabische wiskunde beïnvloed door de interesse in de sterrenkunde en astrologie, waarbij Indiase invloeden werden verrijkt met vertaalde Griekse antieke teksten. Door het werk van al-Khwārizmī is de algebra bekend geworden en op een heldere manier gepresenteerd. Ook in ander opzicht bestaat de Arabische wiskunde vaak uit een verwerking van eerdere resultaten of uitbreiding van delen van de wiskunde. Over het algemeen maakte men bij het oplossen van praktische problemen liever gebruik van reeds bekende methoden. Radicale vernieuwingen zijn er dan ook niet gedaan. Toch is het spijtig dat sommige resultaten van de Arabische wiskunde niet, of pas rijkelijk laat, zijn doorgedrongen tot de westerse wetenschap. Desalniettemin heeft de Arabische wetenschap, die voortborduurde op de antieke erfenis, in belangrijke mate bijgedragen aan de Europese Renaissance, omdat in Europa zelf de wis- en sterrenkunde destijds nauwelijks meer op niveau beoefend werden. De vertaling van Arabisch werk naar het Latijn was daarbij van cruciaal belang en heeft ook bepaald welke Arabische vondsten invloed konden hebben op de Europese ontwikkelingen.

Belangrijke les uit dit hoofdstuk is wel dat de ontwikkeling van de wiskunde gedeeltelijk afhankelijk is van de continuïteit van een traditie en het kunnen voortbouwen op andermans kennis. Zo zijn er ontdekkingen gedaan die domweg geen invloed hebben gehad, omdat ze onbekend gebleven zijn. Dit voortbouwen kan echter belemmerd worden door praktische aspecten, zoals de taal die gehanteerd wordt. Dit zal blijken aan de hand van voorbeelden uit de Indiase wiskunde. De grote invloed van het werk van Euclides heeft dan ook zeker te maken met de didactische voordelen van zijn methode. In dat opzicht heeft de Arabische wiskunde een tijd lang meer vooruitgang kunnen boeken dan de Indiase wiskunde, totdat religieuze opvattingen daaraan weer een halt toeriepen.

Dat religiositeit niet per se een hinderpaal hoeft te zijn voor de ontwikkeling van de wiskunde zal dus blijken uit het eerste hoofdstuk, waarin kardinaal Cusanus' opvattingen besproken worden. Die opvattingen hebben op een moeilijk te traceren wijze invloed gehad op de ontwikkeling van de moderne wetenschap. Die moderne wetenschap richtte zich op kwantitatieve verklaringen van natuurprocessen die waarneembaar zijn – niet langer op bekendheid met de substantiele en eeuwige aard van God of zijn schepping.

In hoofdstuk vier zal Henk Bos benadrukken dat de explosieve groei van de wiskunde in de zeventiende eeuw grotendeels te danken is aan de interesse voor continue veranderingsprocessen. Deze vroegen om een andere wiskunde dan de analytische meetkunde, namelijk om differentiaal- en integraalrekening. Deze werden ontwikkeld door Newton en Leibniz en openden geheel nieuwe velden van onderzoek, die in de erop volgende eeuwen werden ontgonnen. Allerhande gebieden van de mechanica, later ook bijvoorbeeld van de warmteleer of de theorie van het magnetisme, konden met behulp van de differentiaalvergelijkingen worden beschreven. Aangezien deze kennis bovendien voorspellingen mogelijk maakte, werden ook vele technieken en technologieën ontwikkeld die een enorme impact hebben gehad. Maar aanvankelijk werden deze nieuwe vergelijkingen toegepast op dat gebied, dat we ook al in de Oudheid zagen als voornaam domein van de wiskunde: de astronomie en daarmee samenhangende voorspellingen. Voor de zeevaart betekende dat een toegenomen veiligheid.

Aan de hand van een vergelijking tussen een wiskundig overzichtswerk uit het begin van de zeventiende eeuw en een uit het eind van de zeventiende eeuw, maakt Bos duidelijk welke veranderingen er in die eeuw hebben plaatsgevonden. Naast de genoemde differentiaal- en integraalrekening gaat het dan voornamelijk om de ontwikkeling van de analytische meetkunde en om de enorme uitbreiding van de toegepaste of gemengde wiskunde.

Die analytische meetkunde werd ontwikkeld doordat wiskunde uit de Arabische landen in West-Europa bekend werd, terwijl daaraan later nog de herontdekte Griekse wiskunde werd toegevoegd. In het ene geval ging het om de algebra, waarmee men vergelijkingen met een onbekende grootheid ‘x’ kan oplossen, in het andere geval om de analyse van meetkundige problemen, die middels een constructie werden opgelost. Omdat men overeenkomsten zag tussen de algebra en de analyse, lag het voor de hand om te proberen beide methoden te combineren. Op die manier ontstond de analytische meetkunde, waarbij auteurs als Fermat en Descartes aantoonden dat algebraïsche vergelijkingen ook door meetkundige figuren (parabolen, en dergelijke) kunnen worden weergegeven. De vervolgens ontwikkelde differentiaal- en integraalrekening maakte het mogelijk om nog veel meer eigenschappen van die grafieken en specifieke punten ervan te leren kennen.

Bos benadrukt ten slotte, hoezeer deze wiskundige ontwikkelingen gemotiveerd werden door een aantal overtuigingen die men in de zeventiende had over de relatie tussen wiskunde, wetenschap en werkelijkheid, en hoe deze invloedrijk zijn geweest bij de ontwikkeling van de mathematische wetenschappen. Hij verwijst daarbij onder meer naar de Pythagoreïsche overtuiging 'alles is getal': dankzij de nieuw ontwikkelde, wiskundige technieken en hun toepassingen, mocht een dergelijke visie weer op hernieuwde aanhang rekenen. Bovendien bleef de *mathesis universalis* niet beperkt tot de wiskundige natuurwetenschap, maar werkte men aan een wiskundige en logische benadering van al het menselijke denken.

Ontwikkelingen hebben niet altijd de vorm van de revolutionaire vernieuwingen die we in de zeventiende eeuw gezien hebben en waarbij een aantal pioniers – zoals Fermat, Descartes, Newton, Leibniz – zo invloedrijk waren. Even belangrijk kunnen ontwikkelingen buiten het directe gebied van de wiskunde zijn: nieuwe instrumenten en technologieën, allerhande toepassingen, ontstaan en groei van tijdschriften en academies. Bovendien is het van belang om de eerder gedane ontdekkingen uit te werken en te leren toepassen op verschillende probleemgebieden. Jan van Maanen laat in het hoofdstuk 'Sprongen in het diepe en passen op de plaats' zien, dat er in de achttiende eeuw veel van dat soort ontwikkelingen hebben plaatsgevonden. Zo werden allerlei wiskundige natuurwetenschappen ontwikkeld, zoals de hydrodynamica en de hemelmechanica. Ook werden nieuwe gebieden ontgonnen, zoals de kansrekening. Hierbij waren eminente wiskundigen als de Bernoulli's, Euler en Laplace betrokken.

Het werk van Daniel Bernoulli laat zien hoe een eminent wiskundige in die tijd nog actief kon bijdragen aan de ontwikkeling van heel verschillende domeinen van de wiskunde. Belangrijk is zijn werk over de hydrodynamica geweest, over 'de krachten en bewegingen van vloeistoffen'. Tevens paste hij soortgelijke wiskundige technieken toe op de spierwerking, molecuulbewegingen, elasticiteit, enzovoort. Bernoulli nam ook deel aan de discussie over hoe men de eigenschappen van een trillende snaar het beste wiskundig kon beschrijven. Interessant is dat hij daarbij de fysische ervaring dat trillende snaren meerdere (boven-)tonen voortbrengen, liet meewegen in de keuze voor bepaalde wiskundige beschrijvingen. Hij was daarnaast ook actief in de kansrekening, waarbij hij eveneens inventief was in het vinden van modellen voor de beschrijving van praktische problemen zoals de vaccinatie tegen pokken.

Hoezeer een op meerdere fronten actieve wiskundige als Bernoulli onze aandacht ook verdient, Van Maanen vraagt tevens aandacht voor twee geheel andere arena's waarin wiskundigen werkzaam waren. Vanuit ons perspectief valt bijvoorbeeld de grote groep van wiskundigen niet op, die werkzaam was buiten het domein van de selecte groep van vernieuwers. Zij moesten vaak oplossingen voor diverse alledaagse vraagstukken ontwikkelen en bijdragen aan toepassingen van wiskundige vernieuwingen. Een voorbeeld is te vinden in het werk van de provinciale landmeter Morgenster, wiens leerboek zo'n 125 jaar lang werd gebruikt. Hij borduurt daarin voort op de euclidische meetkunde, terwijl hij zich bovendien laat inspireren door de praktische beperkingen die het meten in het veld met zich meebrengt.

Naast deze grote groep van 'alledaagse' wiskundigen was er in de achttiende eeuw ook een kleine groep van auteurs die zich juist richtten op filosofische debatten over de wiskunde. Die debatten gingen deels over vragen over de grondslagen van de wiskunde, bijvoorbeeld over de nieuw ontwikkelde differentiaal- en integraalrekening. Daarnaast ging het om meer metafysische problemen, zoals de verhouding tussen lichaam en geest of het vraagstuk van de vrije wil. Omdat de wiskundige natuurwetenschap het beschrijven van natuurprocessen mogelijk had gemaakt, kregen die klassieke metafysische problemen weer een nieuwe invulling. Bovendien – en hier is weer de invloed van externe omstandigheden zichtbaar – ontstonden er in die tijd allerlei organisaties die middels prijsvragen dit soort debatten aanjoegen. Zelfs de invloedrijke wiskundige Euler nam deel aan dit soort debatten. Hoezeer hij ook bijdroeg aan de ontwikkeling van zowel zuivere als toegepaste wiskunde, hij was er zeer beducht voor om de menselijke geest en God ook te beschrijven als waren ze fysische grootheden. De ambities van de zich sterk ontwikkelende wetenschappen reikten blijkbaar inmiddels zover, dat men zich van de weeromstuit extra ging bekommeren om de grondslagen en om de grenzen van de wetenschappelijke en wiskundige kennis. Zo drong in de achttiende eeuw de wiskunde zowel verder door in het domein van het alledaagse leven, als in het domein van de meer intellectuele en abstracte discussies van die tijd.

Gezien de toenemende aanwezigheid van de wiskunde in de achttiende eeuw, is het verrassend om te zien dat Danny Beckers in het zesde hoofdstuk onze aandacht vraagt voor een tweetal ontwikkelingen in de negentiende eeuw, die op het eerste gezicht tegenstrijdig lijken te zijn: zuivering en institutionalisering. Men zou eigenlijk verwachten dat, wanneer de wiskunde gezuiverd wordt, meer en meer abstract gaat worden en zich gaat richten op bewijsvoering en logische samenhang, deze ontwikkeling de wiskunde juist minder aantrekkelijk maakt voor de grote groep mensen die gebruik maakt van nieuwe wiskundige kennis. Immers, als landmeetkunde en artillerie worden uitgesloten van het vak wiskunde, dan zijn Morgenster en zijn collega's niet langer meer wiskundigen in de traditionele zin van het woord.

Anders dan men zou verwachten, heeft wiskunde als vak, als discipline, zich in de negentiende eeuw zeer sterk kunnen manifesteren. Daarbij waren het niet zozeer de toepasbaarheid en praktische mogelijkheden van de wiskunde die een rol speelden, maar juist de exactheid en logische eigenschappen van het wiskundig redeneren. Hoewel de toegepaste wiskunde minder centraal kwam te staan, kreeg het onderwijs in de wiskunde toch een prominente plaats in de opvoeding van elke inwoner tot een beschaafde burger. De idealen van een autonoom en rationeel denkende en handelende mens die tijdens de Verlichting geformuleerd werden, kregen in deze periode gestalte in het onderwijscurriculum. Het spreekt vanzelf dat dit onderwijs niet meer gericht was op het aanleren van handige rekentrucs, maar op het logisch en exact redeneren dat men vooral middels de wiskunde hoopte over te dragen.

Deze ontwikkeling had natuurlijk veel praktische gevolgen voor het vak wiskunde en haar beoefenaars: de behoefte aan wiskundigen, aan wiskundige leerboeken, aan wiskundefaculteiten en dergelijke, nam enorm toe. Die wiskundigen verenigden zich in allerhande nationaal georiënteerde genootschappen en organiseerden vervolgens ook internationale symposia. Die internationalisering droeg zeker bij aan een toenemende interesse voor zuivere wiskunde, waardoor lokale verschillen in probleemstellingen en aanpak werden verkleind.

We zagen dat in de achttiende eeuw allerlei filosofische debatten gevoerd werden, die zich veelal bewogen op de grens tussen wiskundige kennis en metafysische of levensbeschouwelijke onderwerpen. Parallel aan de zuivering die de wiskunde in de negentiende eeuw onderging, verschoven ook de conceptuele debatten waaraan wiskundigen bijdroegen. Zo beschrijft Beckers hoe het getalbegrip steeds meer aandacht krijgt en om steeds complexere definities vraagt, terwijl men voorheen bijvoorbeeld de eigenschappen van negatieve getallen eenvoudigweg kon veronderstellen. Nu moesten die echter met een axiomatische en strenge bewijsvoering worden afgeleid.

Het is niet zo dat de toegepaste wiskunde doodbloedde, integendeel. Ook de mathematische natuurkunde en andere toepassingen van de wiskunde groeiden sterk en stegen in aanzien. Wel is het zo dat ook in die gebieden soms sprake was van zuivering, zoals blijkt uit de axiomatisering van de mechanica of de warmteleer. Wiskunde diende in toegepaste vorm de beschrijving van een vakgebied of domein, zonder dat het van belang was om – causaal of anderszins – te verklaren waarom die beschrijving effectief was. Een interessante ontwikkeling in dit verband is de toenemende belangstelling voor en toepassing van de kansberekening en statistiek. Was de zuivere wiskunde aantrekkelijk vanwege haar exactheid, in de praktijk bleken grootschalige (sociale) vraagstukken en empirische waarnemingen om een andere wiskundige aanpak te vragen, waarin juist kansen en mogelijke verbanden een rol spelen. Ondanks deze verschillen bestaat er toch een belangrijke overeenkomst tussen de status van de statistiek en van de zuivere wiskunde in die tijd: de vraag naar deze kennis neemt toe, er zijn steeds meer mensen mee bezig en allebei dragen ze bij aan de plaats van de wiskunde in de samenleving als geheel.

De wijze waarop de wiskunde die plaats gaat innemen en vooral met welke enorme groei dat gepaard gaat, zullen we verderop tegenkomen, wanneer de periode na de Tweede Wereldoorlog aan bod komt. Daarbij zal de explosie van allerhande deelgebieden in zowel de zuivere als toegepaste wiskunde opvallen: blijkbaar heeft de wiskunde zich zodanig ontwikkeld, dat het steeds eenvoudiger en zinniger is geworden om haar op de meest uiteenlopende onderwerpen toe te passen.

Gedeeltelijk is dat het gevolg van de zuivering van de wiskunde die in de negentiende eeuw plaatsvond. Daardoor is de wiskunde veranderd van een wetenschap van maat en getal in een wetenschap van (wiskundige) structuren. Meer nog dan maat en getal kan men structuren overal aantreffen of zoeken en bovendien overdragen op heel verschillende contexten, zoals een atoommodel vergeleken kan worden met een planetenstelsel. Omdat die structuren hiervoor – meer dan vroeger – in een abstracte vorm beschreven moeten worden, is het ook eenvoudiger om te zien hoe zo'n structuur aangepast, veranderd (getransformeerd) kan worden. Eigenlijk leende het veel gebruikte axiomatische model zich ook al voor dat soort veranderingen, omdat een enkele verandering van een axioma onmiddellijk het gehele afgeleide systeem zou veranderen. Toch heeft het tot in de negentiende eeuw geduurd voordat iets dergelijks met de euclidische meetkunde zou gebeuren, waarvoor het nodig bleek om het meetkundige ruimtebegrip niet meer te beperken tot een beschrijving van de natuurlijke driedimensionale ruimte.

In het hoofdstuk over de eerste helft van de twintigste eeuw beschrijft Teun Koetsier een aantal vernieuwingen die ontstonden in Göttingen – waar eerder deze niet-euclidische meetkunde werd ontwikkeld. Was deze meetkunde al bevrijd uit de fysische ruimte, zo werd vervolgens de idee van meerdimensionale meetkunden geopperd. De axiomatische stelsels waarmee dergelijke meetkunden worden opgesteld, vormen niet langer adequate definities van concrete, externe (ruimtelijke) objecten, maar bepalen intern de besproken structuren. Een soortgelijke benadering werd ook door de Franse Bourbakigroep bepleit – een Franse groep jonge wiskundigen, die gezamenlijk publiceerden onder het pseudoniem Nicolas Bourbaki. Interessant fenomeen is dat deze groep uit een aantal verschillende auteurs bestaat, terwijl in Göttingen een soortgelijk brandpunt van wiskundige expertise te vinden was. Vroeger hadden wiskundigen ook wel contact met elkaar (vaak schriftelijk), maar met de schaalvergroting en institutionalisering werd blijkbaar de directe samenwerking geboren.

Mooi voorbeeld van de onverwachtse toepassingsmogelijkheden van een abstracte wiskundige theorie, is de toepassing van de wiskundig ontwikkelde vierdimensionale 'tijd-ruimte' in de speciale relativiteitstheorie. Einstein kon daarmee de ruimte volgens de algemene relativiteitstheorie beschrijven. Natuurlijk bleef het gebruik van abstracte wiskundige modellen niet beperkt tot de natuurwetenschap. De trend om wiskunde ook in maatschappelijke contexten te gebruiken, was al in de negentiende eeuw begonnen en betrof met name de statistiek. Deze ontwikkeling zette zich in alle hevigheid voort, waarvan bijvoorbeeld het vak econometrie een gevolg is.

Toch is het niet een tijd van alleen maar optimisme en bloei in de wiskunde. De abstractie van de wiskunde en het feit dat wiskunde niet meer als beschrijving van externe objecten werd gezien, leverde ook fundamentele discussies op. Een eis aan een wiskundige theorie die wel gehandhaafd werd, is dat zij consistent moet zijn. Wanneer wiskundige elementen of verzamelingen echter beschouwd worden als het resultaat van mentale constructies, zoals de Nederlandse intuitionist Brouwer betoogde, dan kan zo'n eis om praktische redenen niet worden vervuld: een oneindige reeks getallen kunnen we mentaal niet doorlopen en dus kunnen we geen consistentie garanderen. Leek deze visie de fundamenten van de wiskunde te ondermijnen, later droeg vanuit andere hoek de onvolledigheidsstelling van Gödel daar nog meer aan bij. Deze onvolledigheidsstellingen wezen op het feit dat een axiomatisch stelsel (in de rekenkunde) niet zijn eigen consistentie en volledigheid kan bewijzen. Toch blijkt het bezwaar, dat de consistentie van een bepaalde theorie niet met de middelen van die theorie zelf bewezen kan worden, de ontwikkeling van de wiskunde niet werkelijk belemmerd te hebben. Integendeel: de discussies die hierdoor ontstonden hebben zelf weer tot nieuwe resultaten geleid.

Enerzijds heeft de wiskunde zich dus vanaf de negentiende eeuw steeds meer bekommerd om haar eigen structuur en grondslagen, anderzijds heeft zij toch ook steeds meer toepassingen gevonden: niet alleen in de wetenschap en het onderwijs, maar ook in bijvoorbeeld de industrie en als sociaal-politiek instrument. Blijkbaar hebben de fundamentele problemen niet geleid tot onbruikbaarheid van de toepassingen van de wiskunde en zijn er geen onderdelen van de wiskunde in hun geheel ongeldig verklaard, maar is hun geldigheid gebonden aan extra voorwaarden. De klassieke kwestie van de 'unreasonable effectiveness of mathematics' in andere wetenschappen, heeft door die grondslagenproblematiek wel aan kracht gewonnen. Desalniettemin heeft sindsdien de wiskunde alleen maar meer haar bruikbaarheid getoond, soms op heel onverwachtse momenten – wanneer lange tijd nadat een wiskundig inzicht geformuleerd was er een toepassing gevonden bleek.

Tijdens de Tweede Wereldoorlog werden er nieuwe takken van de wiskunde ontwikkeld ten behoeve van bijvoorbeeld de grote logistieke vraagstukken, de cryptografie of de stuursystemen van raketten. Na de Tweede Wereldoorlog heeft dat verschijnsel van de ontwikkeling van geheel nieuwe wiskundige domeinen een grote vlucht genomen, zoals Tom Koornwinder laat zien in 'Wiskunde in de laatste zestig jaar: exponentiële groei en structurele vernieuwing'. Blijkbaar zijn de wiskundige technieken zo ver doorontwikkeld, dat specialisering onvermijdelijk geworden is. Dat leidt ook tot een ander fenomeen, waarvan we de eerste tekenen al in de eerste helft van de twintigste eeuw zagen optreden: in toenemende mate gaan wiskundigen met elkaar samenwerken om complexe vraagstukken op te lossen. Een extreem voorbeeld is het bewijs voor het bestaan van een bepaald aantal 'enkelvoudige eindige groepen' dat in ongeveer tienduizend pagina's gepubliceerd werd door circa honderd wiskundigen. Dergelijke wiskunde is zelfs voor de specialist niet meer te overzien, laat staan voor de wetenschapper die wiskunde in zijn vak gebruikt of de gemiddelde student of scholier. Toch hebben ook die laatsten in toenemende mate te maken met complexe vormen van toegepaste wiskunde. Dit komt mede door allerlei technologieën die in grote mate berusten op nieuwe vormen van wiskunde, zoals de computer, digitale apparaten voor geluid en beeld, enzovoort.

Op zijn beurt heeft de computer ook weer een grote impuls gegeven aan ontwikkelingen binnen de wiskunde. Dan gaat het niet alleen om het feit dat de computer een beroep doet op allerhande vormen van discrete in plaats van continue wiskunde (omdat digitale apparaten nu eenmaal gebruik maken van discrete input), maar ook om de mogelijkheden die de computer biedt. Natuurlijk niet alleen als rekenmachine voor grote en complexe dataverzamelingen, maar tegenwoordig zelfs bij het bewijzen van bepaalde wiskundige stellingen, wordt wel van de computer gebruik gemaakt. Zo heeft de wiskunde een toepassing gevonden in een apparaat dat vervolgens in belangrijke mate heeft bijgedragen aan de ontwikkelingen en toepassingen van de wiskunde zelf.

Al met al heeft de wiskunde na de Tweede Wereldoorlog zich explosief ontwikkeld, zowel in omvang van het aantal beoefenaars en publicaties als wat betreft het aantal deelgebieden en toepassingen. Meer nog dan voorheen valt de wiskunde niet meer weg te denken uit onze wereld, terwijl tegelijkertijd veel van de gebruikte wiskunde het domein van specialisten is geworden.

Op zichzelf hoeft dat geen probleem te zijn en geldt dat niet uitsluitend voor de wiskunde: ook in andere wetenschappelijke disciplines heeft vergaande specialisatie de kloof tussen lekenkennis en wetenschap enorm vergroot. Zorgwekkend zou het zijn wanneer die kloof ertoe zou leiden dat de wiskunde alleen maar als specialistenvak wordt beschouwd en men zelfs elementaire delen van de wiskunde niet meer als onderdeel van elke volledige opvoeding en scholing vereist.

NOTEN

1. Geoffrey Lloyd geeft dan ook als twee karakteristieken van deze natuurfilosofen: 'First there is what may be described as the discovery of nature, and second the practice of rational criticism and debate.' In: *Early Greek Science: Thales to Aristotle*. Chatto & Windus 1970, p. 8.
2. Zie S. Sambursky: *The Physical World of the Greeks*, Routledge, Londen 1956, p. 14 hierover: 'Here we have the scientific model in its purely descriptive sense – the reduction in scale of cosmic dimensions to a size at which the whole and its parts can be conveniently studied.' Het woord 'model' is hier van groot belang.

LITERATUUR

Diog. Laertios I 27; in: *Die Vorsokratiker*; vert. J. Mansfeld, Reclam Verlag, Stuttgart 1987, p. 49.

Herodotos, *Historiën*. Vert. Onno Damsté, Fibula-van Dishoeck, Bussum 1974; p. 103.

Hippolytos, Haer. I, 1 en 6,3-5; in: *Die Vorsokratiker*; vert. J. Mansfeld, Reclam Verlag, Stuttgart 1987, respectievelijk pp. 53 en 77.

1

Zonder kennis van de wiskunde geen toegang? Conceptuele kwesties in de geschiedenis van de wiskunde

Machiel Keestra

1.1 Cultuurgeschiedenis en wiskunde – twee tegengestelde domeinen?

Cultuurgeschiedenis en wiskunde zijn twee verschijnselen die niet vanzelfsprekend in een adem genoemd worden. Sterker nog: op het eerste gezicht lijken cultuurgeschiedenis en wiskunde twee aan elkaar tegengestelde onderwerpen te zijn. Twee onderwerpen die naar hun eigen aard een totaal verschillende behandeling schijnen te vragen. Een behandeling die bovendien plaatsvindt in zo verschillende circuits en zo verschillende betoogwijzen, dat men ze wel paradigmatisch kan beschouwen voor de 'two cultures', waartussen regelmatig een ontstellende kloof opgemerkt wordt. Om dit toe te lichten zal ik eerst een aantal van de belangrijkste aspecten bespreken die cultuurgeschiedenis en wiskunde uit elkaar lijkt te drijven, althans op het eerste gezicht.

Toeval versus noodzakelijkheid?

Geschiedenis lijkt per definitie aan cultuur gebonden te zijn. Geschiedenis verhaalt over het algemeen van menselijke gebeurtenissen en is in die zin een variant van de historie, het verhaal. Een wezenlijk onderdeel van elke cultuur is juist het verhalen van gebeurtenissen. Die gebeurtenissen kunnen waar gebeurd zijn dan wel voortspruiten uit de menselijke fantasie: vaak hebben die verhalen een functie om de cultuur te structureren door middel van historische of mythologische inhouden. Hermeneutiek en andere tekstkritische benaderingen benadrukken dan ook dat er geen strikte scheiding gemaakt kan worden tussen feit en fictie in de geschiedenis. Nu lijkt dit voornamelijk op te gaan voor verhalen over gebeurtenissen die primair cultureel van aard zijn, die te maken hebben met de mensheid en menselijke samenlevingen.

Inmiddels weten we echter dat ook de aarde en de levende natuur een geschiedenis kennen. Geschiedenis bleek niet alleen afhankelijk van de interactie tussen mensen en fenomenen, zoals taal en religie en staatsvorming. In elke geschiedenis spelen toevallige gebeurtenissen een belangrijke rol: meteoren, overstromingen, ziektes, revoluties.

Met de wiskunde lijken we een wezenlijke tegenpool van de geschiedenis te bezitten. In de wiskunde gaat het immers helemaal niet om mensen of gebeurtenissen, laat staan om ontwikkelingen. De wiskunde beschrijft juist structuren of relaties die niet getekend zijn door allerlei bijkomstige aspecten die menselijke structuren en relaties zo kenmerken, veronderstelt men. Weliswaar kunnen veel van de natuurlijke of cultuurhistorische ontwikkelingen beschreven worden in wiskundige termen – dit betekent niet dat die wiskundige termen omgekeerd weer bepaald worden door dit soort ontwikkelingen. Weliswaar kent de wiskunde als vak of kennisdomein een zekere ontwikkeling, maar deze staat los van de aard van die wiskunde zelf. Zo is het bijvoorbeeld niet nodig om te weten welke ontwikkelingen aan de introductie van de differentiaalrekening vooraf gingen. Soms kan het didactisch handig zijn om de ontwikkeling van de wiskunde te behandelen, maar meer dan een hulpmiddel zou dit niet zijn. Het geheel van de wiskunde zou een interne noodzakelijkheid bezitten die in de geschiedenis niet te vinden is. Structuren en resultaten in het ene wiskundige deelgebied zouden in andere deelgebieden hun geldigheid niet verliezen.

Cultuurgebondenheid versus universaliteit

In het verlengde van bovengenoemd onderscheid wordt meestal uitgegaan van de veronderstelling dat wiskunde zich bezighoudt met universeel geldige feiten. De relevantie van een cultuurgeschiedenis en ook het begrip daarvan lijkt daarentegen beperkt te zijn tot de onderhavige cultuur zelf. Natuurlijk kan iemand uit een andere cultuur (of periode) interesse voor en begrip hebben van een cultuurgeschiedenis, maar wat hij met die kennis kan beginnen is twijfelachtig. Hoe anders is dat wanneer iemand kennis maakt met een bepaald onderdeel van de wiskunde. Zowel het begrijpen als het gebruiken van wiskunde is ontheven van elke beperking. Wiskundige kennis lijkt een universele geldigheid te bezitten, die in principe voor iedereen inzichtelijk is en die bovendien welhaast universeel bruikbaar is. Anders ligt dat bij cultuurhistorische inzichten, waarbij het hoogst problematisch is om zo'n inzicht te gebruiken als leidraad voor menselijk handelen in andere omstandigheden en perioden. Zelfs beursfondsen waarschuwen dat 'behaalde resultaten in het verleden geen garantie zijn voor toekomstige resultaten'.

Natuurlijk is de wiskunde niet helemaal ontbloot van een cultuurhistorisch aspect, zoals elke scholier weet. Er bestaan immers verschillen tussen allerhande wiskundige getallenstelsels of talen, die zo hun eigen voor- en nadelen hebben. Het Romeinse gebruik van letters om getallen aan te duiden, bleek behoorlijk omslachtig en bovendien onhandig om wiskundige bewerkingen mee uit te voeren. Daarom hebben wij wel het Latijnse schrift, maar uiteindelijk Arabische cijfers en een Indiase nul in gebruik genomen in de wiskunde. Deze culturele en historische ontwikkeling blijkt echter niets af te doen aan de universele geldigheid van de wiskundige sommen die met die cijfers gemaakt kunnen worden. Integendeel: de universaliteit van de wiskunde lijkt juist bevestigd te worden door het feit dat vondsten uit verschillende culturen probleemloos met elkaar gecombineerd kunnen worden in die wiskunde. Datzelfde kan lang niet altijd van religieuze of literaire topoi gezegd worden. Blijkbaar is er iets eigenaardigs met die wiskundige vondsten aan de hand.

Kwaliteit versus kwantiteit

Veelal wordt dat eigenaardige van wiskundige vondsten toegeschreven aan het algemene onderwerp van de wiskunde: kwantiteit. Van oudsher gold de wiskunde als de wetenschap van maat en getal. Of het nou om oppervlaktes, hoeveelheden, verhoudingen of andere objecten gaat: in alle gevallen beschouwt de wiskunde die onderwerpen vanuit hun kwantitatieve aspect. Is het in de meeste gevallen onjuist om appels met peren te vergelijken, wanneer die vruchten puur naar hun getalsmaat of hun geometrische vorm worden vergeleken dan is dat geen probleem. Daarmee ziet een wiskundige benadering van die vruchten natuurlijk af van allerlei belangwekkende aspecten, anderzijds heeft die benadering daaraan haar universaliteit en 'ontijdelijkheid' te danken.

Zoals verschillende vruchten naar hun kwantiteit met elkaar vergeleken kunnen worden, zo kan men natuurlijk ook cultuurgeschiedenis beoefenen met behulp van kwantitatieve gegevens. Men kan bijvoorbeeld verschillende periodes van een bepaalde samenleving met elkaar vergelijken door demografische of economische cijfers te gebruiken. Of men kan verschillende samenlevingen aan de hand van dat soort cijfers naast elkaar zetten om te vergelijken. Onderzoekers van de 'Big History' – waarin de kosmische, biologische en menselijke samengevat worden – richten zich momenteel zelfs op een beschrijving van die geschiedenis puur in termen van de toenemende hoeveelheid energie die per fase door een bepaalde eenheid materie stroomt of verbruikt wordt.[1] Dit voorbeeld maakt duidelijk hoe de wiskunde alom bruikbaar kan zijn.

Maar tegelijk wordt duidelijk dat daarmee in hoge mate afstand genomen wordt van de eigenaardige kwaliteiten die culturen lijken te kenmerken, zoals machtsrelaties, religiositeit, kunstbeoefening, arbeidsdeling enzovoort. Om deze kwaliteiten te begrijpen moeten we talige of anderszins symbolische uitingen interpreteren, waarvoor vaak uitvoerige contextuele en ook historische kennis is vereist. Zo blijkt cultuurhistorisch onderzoek per se een moeizame aangelegenheid, die nooit tot een afronding kan komen. Hoe anders lijken wiskundige problemen te zijn: in principe is er een definitieve oplossing van (vrijwel) elke vergelijking mogelijk, zou de gevraagde maat of getal berekend moeten kunnen worden.

Open versus gesloten

Toch is noch de wiskunde, noch de cultuurgeschiedenis een afgesloten terrein van onderzoek. Er zijn eindeloos veel mogelijke berekeningen die gedaan kunnen worden, eindeloos veel structuren te ontwikkelen en beschrijven, zoals er ook eindeloos veel historische feiten zijn die beschreven en begrepen kunnen worden. In die zin geldt er openheid voor beide terreinen. Het verschil zit hem echter in de uitgangspositie: wat mag de cultuurhistoricus tot zijn domein rekenen en hoe dient hij (of zij, natuurlijk) dat te begrijpen? Alleen daarover al verschillen de meningen tussen collega's enorm. Hun terrein is dus van meet af aan onbepaald en staat open voor discussie. Een terrein waarop bovendien sinds kort ook biologen en ethologen zich begeven, nu die aannemelijk maken dat in het dierenrijk ook groepsgebonden culturele eigenschappen blijken voor te komen.

In dat opzicht hebben wiskundigen het bepaald eenvoudiger: zij bakenen om te beginnen hun domein af met definities van hun onderwerpen en axioma's over eigenschappen van die onderwerpen. In de wiskunde worden als het ware de spelregels ontworpen en vervolgens wordt het spel gespeeld. Elk spel kent weliswaar enorm veel variaties, maar de grenzen waarbinnen die variaties kunnen optreden, zijn van meet af aan bekend. De wiskunde lijkt zo een geslotenheid bij aanvang te bezitten, die de openheid bij de uitvoering niet in de weg staat.[2]

1.2 DE HISTORISERING VAN DE WISKUNDE

De oplettende lezer zal al gemerkt hebben dat de opgevoerde verschillen tussen cultuurgeschiedenis en wiskunde niet altijd zo scherp te stellen zijn. Zo blijkt de cultuurgeschiedenis soms haar voordeel te kunnen doen met wiskundige instrumenten. Daarnaast is het gestelde ideaalbeeld van de wiskunde met name in de laatste eeuw flink ondermijnd.

Dat ideaalbeeld had inmiddels een lange en eerbiedwaardige geschiedenis. Het werd in de antieke oudheid geformuleerd door vooral de wiskundige Euclides en de filosoof Aristoteles. In zijn algemeenheid bestaat dat ideaalbeeld van de wiskunde uit een stelsel van definities en uitgangspunten, waaruit vervolgens met logische noodzakelijkheid allerlei relevante uitspraken uit kunnen worden afgeleid. Zo begint boek I van de *Elementen* van Euclides met: '1. Een punt is datgene wat geen delen bezit' (Euclides, 1956, 6). Vervolgens geeft hij postulaten, bijvoorbeeld over de wijze waarop tussen twee punten een lijn getrokken kan worden. Daarna komen een aantal noties, die bijvoorbeeld nader toelichten hoe gelijke grootheden met elkaar vergelijkbaar zijn. Een dergelijk stelsel legt in aanvang zowel zijn inhoud als ook zijn afleidingsregels vast, waardoor volmaakte consistentie en juistheid kan worden bereikt. Deze euclidische of axiomatische methode, zoals gebruikt in de wiskunde, heeft een enorme invloed gehad op de geschiedenis van de wetenschap. Daarbij is ze niet alleen gebruikt als een soort hulpinstrument van wetenschapsbeoefening, maar heeft ze ook gefungeerd als een voorbeeld. Het 'more geometrico' – 'op de wijze van de (euclidische) geometrie' – poneren van wetenschappelijke kennis stond gelijk aan het bewijzen van de onomstotelijke waarheid ervan. Daarom werd dit voorbeeld niet alleen nagevolgd in de geometrie maar ook in bijvoorbeeld de logica, de metafysica en zelfs de fysica. Natuurlijk moet in al die gevallen aan het begin worden geformuleerd welke elementen, beginselen het onderwerp zijn van zo'n stelsel. Men ging er echter vanuit dat ook op andere terreinen dat soort elementaire en evidente uitgangspunten gevonden konden worden. Sterker nog, er zijn ook pogingen geweest om een enkele maar alomvattende wetenschap te formuleren en die zijn meestal op een axiomatische leest geschoeid geweest. Niet de minste namen zijn verbonden aan pogingen om een of meerdere wetenschappen te voorzien van een axiomatisch-deductieve structuur. Zo hebben bijvoorbeeld Descartes, Hobbes, Spinoza, Newton, Hilbert, Peano, Russel en Von Neuman werken gepubliceerd waarin zij de gehele filosofie, dan wel de fysica, rekenkunde, logica of bijvoorbeeld de kwantummechanica op een dergelijke leest wilden schoeien.

Zonder op de details van de grondslagencrisis in de wiskunde en de voorbodes daarvan in te gaan (daarop wordt elders in dit boek ingegaan) moet erop gewezen worden dat er in elk geval twee soorten van ondermijning van dit ideaalbeeld geweest zijn. In de negentiende eeuw bleek het al mogelijk om verschillende axiomatische stelsels te formuleren, die in hun resultaten niet met elkaar te verenigen bleken. Bekendst is natuurlijk dat een euclidisch en niet-euclidisch stelsel kon worden opgesteld, waardoor bijvoorbeeld driehoeken met tegenstrijdige eigenschappen werden gedefinieerd: bij Euclides is de som der drie hoeken van een driehoek altijd 180 graden, bij alternatieve stelsels kon die som meer of minder dan 180 graden zijn.

Vervolgens werden er verschillende pogingen ondernomen om deze alternatieve stelsels op hun beurt te funderen in een enkele wiskundige logica, die natuurlijk wel intern consistent zou moeten zijn. Een andere reddingspoging – ondernomen door de Nederlandse wiskundige Brouwer – probeerde de logica en de fundering van de logica te herzien, waardoor dit soort contradicties niet meer zo desastreus hoefden te zijn. Dit zogeheten intuïtionisme heeft echter maar beperkte aanhang gekregen. De meeste hoop was gericht op de red-ding door middel van een aanvullend logisch of formeel systeem. De genadeklap voor deze verhoopte oplossing kwam toen Kurt Gödel in de jaren 1930 met zijn befaamde 'onvolledigheidsstelling' bewees, dat elk wiskundig stelsel dat niet tot contradicties leidt voor zijn bewijs een beroep moet doen op een ander stelsel – kortom, er bestaat geen wiskundig consistent stelsel dat zichzelf kan funderen en bewijzen.

Hoe zeer deze problemen en de ondernomen oplossingen het werk van wiskundigen in die tijd beïnvloed heeft, blijkt wel uit de bekentenis van de eminente wiskundige, kwantumtheoreticus en speltheoreticus – en axiomatiseerder! – John von Neumann in zijn opstel 'The Mathematician':

> I know myself how humiliatingly easily my own views regarding the absolute mathematical truth changed during this episode, and how they changed three times in succession! (In: Newman, 1988).

Natuurlijk hebben deze problemen de ontwikkeling en groei van de wiskunde niet tegengehouden, integendeel. Wel hebben ze geleid tot een andere visie op de wiskunde, ook in de ogen van wiskundigen zelf. Kort samengevat komt het erop neer dat de wiskunde meer een 'gewone' wetenschap is geworden, die veel eigenschappen deelt met wetenschappen zoals de natuurkunde of zelfs de sociale wetenschappen. Net zoals voor die wetenschappen geldt, blijkt ook voor de wiskunde niet alleen maar sprake te zijn van een gestage groei van kennis, die de eerder verworven kennis intact laat. Niet alleen de geschiedenis van de wiskunde moet regelmatig herschreven worden, omdat er nieuwe kennis en inzichten zijn opgedaan. Ook de stellingen of resultaten van de wiskunde zijn soms onderhevig aan veroudering en moeten herzien worden. Enkele van deze punten en nog andere worden beschreven door Michael J. Crowe in zijn 'Ten Misconceptions about Mathematics and Its History'.

Zo blijken de hierboven behandelde tegenstellingen tussen cultuurgeschiedenis en wiskunde niet geheel op te gaan. De waarde van een cultuurgeschiedenis van de wiskunde is dan ook meer dan slechts anekdotisch of didactisch. Zo'n cultuurgeschiedenis kan enkele wederzijdse invloeden van culturele en wiskundige ontwikkelingen tonen, maar daarnaast ook een completer beeld schetsen van wat de wiskunde is en wat de wiskunde aan mogelijkheden en beperkingen biedt.

Opvattingen over de mogelijkheden en beperkingen van de wiskunde hangen uiteindelijk ook af van opvattingen over de aard van het wiskundige object en de soort kennis die wij van dat object hebben. Meestal worden deze niet expliciet aan de orde gesteld. Omdat het behulpzaam kan zijn om die posities enigszins te kennen en dus ook verderop te herkennen, zal ik in dit hoofdstuk ingaan op de ideeën van Plato en Aristoteles. Deze zijn nogal verschillend van elkaar en hebben allebei een grote invloed gehad op de latere opvattingen omtrent het wiskundige object. Zij hebben als het ware de concepten geleverd waarmee vervolgens meestentijds over de wiskunde gedacht werd.

Hoe verschillend hun opvattingen ook waren, zij leken het echter wel eens te zijn over de gebrekkige toepasbaarheid van de wiskunde op de kennis van de natuur: juist de formele exactheid van de wiskunde maakte haar onbruikbaar voor het kennen van de dynamische en materiële natuur. Voor het ontstaan van een mathematische natuurwetenschap moest dan ook het begrip van de wiskunde aangepast worden. Een auteur die dit op een heldere manier gedaan heeft en indirect ook van invloed is geweest op de ontwikkeling van de 'scienza nuova' is de wiskundige, theoloog en filosoof kardinaal Nicolaus von Kues, ook wel Cusanus geheten. Aan Cusanus zal ik dan ook als derde auteur wat uitgebreider aandacht besteden.

Hopelijk zullen Plato, Aristoteles en Cusanus na lezing van dit boek niet alleen interessante personages blijken te zijn voor een cultuurgeschiedenis van de wiskunde, maar bieden zij instructieve posities die nog steeds te denken geven ten aanzien van de wiskunde.

1.3 DE AANTREKKINGSKRACHT VAN HET PLATONISME OF IDEALISME IN DE WISKUNDE

De hierboven geconstrueerde tegenstelling tussen cultuurgeschiedenis en wiskunde kent een lange geschiedenis. In feite gaat ze voor wat betreft de opvattingen over de wiskunde terug tot de antieke oudheid en vinden we ingrediënten ervan in Plato's dialogen. In die dialogen wordt aan de wiskunde – meestal in de gedaante van rekenkunde of meetkunde – regelmatig respect betoond, dat veelal te maken heeft met genoemde ingrediënten. In *De Wetten* wordt zelfs onomwonden door de Athener betoogd:

> Want met het oog op de huishouding, op de staatsinrichting, op alle kunsten, bezit geen enkel leervak zo grote opvoedkundige waarde als de studie der getallen. Het voornaamste is wel dat zij de slaperige, van nature domme geesten wakker schudt en hen goedleers, flink van geheugen en schrander maakt en dat ze hen, dank zij het goddelijke dat er in die kunst zit, boven hun eigen natuur doet uitgroeien (V, 747 b; vert. X. de Win, 1980).

Dat dit niet alleen voor de getalsleer maar ook voor de geometrie geldt, blijkt uit de dialoog *De Staat*, waarin de meetkunde gelijk wordt gesteld aan 'kennis van het eeuwig zijnde', die volgens Socrates 'de ziel naar de waarheid zal trekken en de wijsgerige gezondheid doen ontstaan met de bedoeling dàt naar omhoog te richten wat we nu verkeerdelijk naar beneden houden' (VII, 527 b, ibid.).

Volgens deze visie richt de wiskunde zich op het eeuwig en onveranderlijke zijnde, bezit ze daarom ook iets goddelijks en stelt ze mensen in staat om hun afgestompte geest te verbeteren en zich omhoog te richten. De wiskunde laat in Plato's visie niet toe dat men bij bewijsvoeringen aan komt zetten met getallen die gerelateerd zijn aan zichtbare of tastbare objecten (*De Staat*, VII, 525 d). In elk geval bezit de wiskunde zo een opvoedkundige waarde ten opzichte van alle kunsten of kundigheden. Bovendien is de wiskunde blijkbaar behulpzaam bij het bereiken van de waarheid door de ziel.

Deze opvatting heeft – waarschijnlijk in het Platonisme – geleid tot het gerucht dat boven de ingang van Plato's Academie te lezen zou zijn geweest: 'αγεωμετπητοσ μηδεισ εισιτω', ofwel 'Niemand zonder kennis van de geometrie mag binnenkomen'. Dit opschrift komt voor het eerst ter sprake in een manuscript, zo'n 800 jaar na Plato's dood.[3] Dit opschrift bestond waarschijnlijk nog niet tijdens Plato's leiderschap van de Academie, omdat Aristoteles er dan wel naar verwezen zou hebben. Aristoteles was namelijk zeer kritisch ten aanzien van de overheersende positie van de wiskunde in de filosofie van de Academie.

Een dergelijke toelatingseis doet denken aan de groep der Pythagoreeërs, die reeds voor Plato aan de wiskunde een metafysische betekenis toekenden. Deze groep was geïnteresseerd in de wiskunde, omdat ze meende via wiskundige inzichten kennis te maken met de eeuwige en onveranderlijke structuur van de werkelijkheid. Harmonische verhoudingen in de muziek, astronomische bewegingen, driehoeksmaten: 'αριθμωι δε τε παντ'εοικεν', alles komt overeen met het getal (Iamblichos, 1987, pp. 147-147). In zekere zin kan alles beschouwd worden als een getal, omdat een getal overal op kan slaan en bovendien elk getal gerelateerd kan worden aan elk willekeurig ander getal. Zo laat de hele werkelijkheid zich getalsmatig kennen en ook vanuit één gezichtspunt beschrijven.

Daarmee werd dus al in de vijfde eeuw voor onze jaartelling een metafysica opgesteld die had kunnen bijdragen aan een mathematische natuurwetenschap. Het heeft echter om verschillende redenen nog lange tijd geduurd voor het zover was. Ten eerste ontdekten de Pythagoreeërs dat er ook zogenaamde 'irrationale getallen' bestaan, die niet in de kosmos thuis leken te horen, zoals de $\sqrt{2}$. Zo'n irrationaal getal is immers niet uit te drukken als de verhouding tussen twee natuurlijke getallen.[4] Hoe sektarisch de Pythagoreeërs hebben geopereerd en welke rol de wiskunde in die 'sekte' speelde, blijkt wel uit de anekdote dat de persoon die dit inzicht bekend maakte in zee geworpen werd (Iamb. Vit. Pyth 247; DK 18.4). Ten tweede gingen zij zover dat ze aan de getallen ook allerlei niet-mathematische eigenschappen toekende. Volgens deze getalsmystiek bezitten getallen bijvoorbeeld ook rechtvaardigheid of volkomenheid.

Aan een dergelijke mystieke verering van wiskundige objecten bezondigde Plato zich niet. Helaas ging hij zelfs verder dan alleen het negeren van mystieke eigenschappen van getallen. Hij bracht namelijk de wiskunde onder in een afgescheiden en ideële sfeer van de werkelijkheid. Daarmee creëerde Plato een kloof tussen de wiskunde en mogelijke toepassingen van de wiskunde in de empirische natuurwetenschap.

Toch laat Plato ene Timaeus in zijn gelijknamige dialoog, verhalen van een God die, als een ambachtsman, gebruik gemaakt heeft van vormen en getallen bij de ordening van het heelal zoals hij dat aantrof. In dit model zijn veel wiskundige vormen en verhoudingen verwerkt, waarmee Plato zowel astronomische, natuurkundige als ook biologische ordeningen omschrijft. In deze dialoog worden ook de geometrische figuren genoemd waaruit – opgehoopt in grote getale – alle stoffelijke lichamen bestaan. Wiskundige objecten als een model voor de ordening van de kosmos en volgens het verhaal zelfs voor de onzichtbare deeltjes die samen de materie vormen: deze ideeën hadden aanleiding kunnen zijn voor het ontstaan van een wiskundige natuurwetenschap. Het feit dat de *Timaeus* tot in de twaalfde eeuw de enige volledig bekende dialoog van Plato was, had daar ook aan kunnen bijdragen – nog op de bekende schildering van de Atheense school, door Rafaël in 1504 geschilderd, loopt Plato met de *Timaeus* in zijn armen.

Toch heeft Plato niet werkelijk een aanzet tot een dergelijke natuurwetenschap gegeven. Dit is vooral te wijten aan zijn overtuiging dat het empirische gedeelte van zo'n wetenschap roet in het eten gooit. Zo wijst Socrates de toegepaste wiskunde inderdaad af wanneer hij opmerkt dat – zoals de Pythagoreeërs dat al deden in de harmonieleer – de astronoom 'zijn tijd en moeite verliest door onderlinge opmetingen' (*De Staat* VII, 531 a).[5] De 'status aparte' van wiskundige objecten maakte het niet alleen onnodig, maar ook onzinnig om empirisch onderzoek te doen naar wiskundige maten of structuren in de empirische werkelijkheid. Empirisch onderzoek zou immers geen kennis van de wiskunde op kunnen leveren en omgekeerd zouden wiskundige inzichten slechts beperkte relevantie bezitten voor werkelijke kennis. Dit laatste heeft te maken met het feit dat wiskunde berust op een aantal hypothesen en daardoor niet zulke absolute kennis kan bereiken als de dialectische methode, zoals Socrates die bepleit.[6] Al met al is voor Plato de wiskunde een stap op weg naar ware kennis, omdat ze niet meer gerelateerd is aan zintuiglijke kennis.[7] Aan de ander kant schiet de wiskunde wezenlijk te kort, omdat ze berust op een aantal hypotheses en zo geen absoluut ware kennis oplevert.

1.4 HET PROBLEEM VAN DE EMPIRISCHE HERKOMST VAN MATHEMATICA BIJ ARISTOTELES

Ondanks deze tegenwerpingen heeft Plato's idealisme betreffende de wiskundige objecten een grote aantrekkingskracht uitgeoefend in de geschiedenis van de wiskunde. De metafysische aanname van een afgescheiden domein van wiskundige objecten leek een aantal (vermeende) eigenschappen van de wiskunde te verklaren, zoals de niet door paradigmawisselingen geplaagde groei van de wiskunde, de formele consistentie van de traditioneel wiskundige systemen en de universele geldigheid ervan. Toch levert dit metafysische uitgangspunt ook een aantal problemen op. Dan bedoel ik nog niet eens de structurele of formele problemen waar hierboven op is gewezen. Het metafysische uitgangspunt levert namelijk ook een metafysisch probleem op: hoe kunnen de objecten en structuren van een afgescheiden domein als de wiskunde, ook toepasbaar zijn op objecten en structuren van andere domeinen zoals de fysica? Dit probleem is op klassieke wijze verwoord als 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences' met het dictum: 'Het mirakel van de geschiktheid van de taal van de wiskunde voor het formuleren van de natuurkundige wetten is een wonderbaarlijk geschenk dat we begrijpen, noch verdienen'.[8]

Filosofisch is dat natuurlijk een zeer onbevredigend antwoord en komt het neer op een vorm van dualisme. Elk dualisme lijkt onbevredigend, omdat we dan erin moeten berusten dat de werkelijkheid blijkbaar uit een aantal totaal van elkaar afgescheiden domeinen bestaat. Dit geldt met name wanneer het ene domein, dat van de natuur, zich bijvoorbeeld redelijk laat beschrijven in termen van het andere domein, dat van de wiskunde.

Dit soort vragen en het probleem van het dualisme zijn voor Aristoteles belangrijke drijfveren geweest bij zijn kritiek op Plato. Hij stelt bijvoorbeeld dat dualisten, zoals Plato, niet genoegen kunnen nemen met een sfeer van ideëele en afgezonderde mathematische objecten enerzijds, en een sfeer van materiële, waarneembare lichamen anderzijds, maar dat ze ook nog een tussenvorm moeten veronderstellen van belichaamde mathematische objecten (*Metaf.* M, 2, 1076 b 16). Wellicht doelt hij hier op een soort tussenvorm van toepasbare wiskundige objecten en vraagt hij zich af hoe deze te vergelijken zouden zijn met 'zuiver' wiskundige objecten. Ondanks zijn kritiek op de platonische benadering, maakt Aristoteles de wiskunde niet tot een empirische wetenschap. Zo'n visie zou een volslagen spiegelbeeld zijn van het formele, axiomatische systeem van wiskunde zoals dat hierboven beschreven werd en dat met name geassocieerd wordt met de naam van Euclides. Opmerkelijk genoeg is het echter Aristoteles geweest, die een beschrijving heeft gegeven van een axiomatisch-deductief systeem van redeneren in de wetenschap – nog voor Euclides[9] zijn *Elementen* opstelde.[10] Dit is opvallend omdat over het algemeen quasi-empirische en Euclidische theorieën tegenover elkaar worden gesteld.[11]

Aristoteles wil op de twee belangrijkste problemen omtrent de wiskunde een antwoord bieden: enerzijds wil hij de toepasbaarheid van wiskundige kennis op de empirie verklaren, anderzijds wil hij de niet-toevallige aard van de wiskundige waarheden funderen. Hij kan de wiskunde dus niet tot een volslagen empirische wetenschap bestempelen. Zijn benadering wordt dan ook geleid door een gemengde strategie, deels kentheoretisch, deels meer formeel van aard.

De kentheoretische vraag betreft de herkomst van wiskundige objecten in de menselijke geest. In dit verband wijst Aristoteles op het vermogen tot abstractie: van de materiële en zintuiglijke objecten worden wiskundige eigenschappen afgeleid door alle andere eigenschappen te negeren, zoals hun wezenlijke en hun materiële eigenschappen. Zo verliest een ronde zalfdoos zijn schoonheid, zijn functionaliteit en zijn materialiteit. Wat overblijft, zijn aspecten van grootte en telbaarheid (*Metaf.* 1077 b 1722). En van een bronzen kogel kunnen we met onze abstraherende geest een cirkel afleiden.[12]

Nu beseft Aristoteles goed dat we zo'n wiskundig object en onze manipulaties daaromtrent niet moeten laten afhangen van de eigenschappen van het oorspronkelijke object, zoals een bronzen kogel. Theorema's over de structuur van de cirkel zijn immers geen empirische uitspraken. In het vervolg op de kentheoretische activiteit van de abstractie vindt er nog een ontologisch opmerkelijk productiviteit plaats: 'men onderzoekt een dergelijk object het best indien men datgene wat geen zelfstandige realiteit heeft, als zelfstandig poneert, zoals de arithmeticus en de geometer doen' (*Metaf.* 1078 a 21).

Hoe kun je een zelfstandig (niet-empirisch) domein maken van iets dat geen eigen zijnssfeer bezit – zoals Plato meende? Wiskundigen doen dat door middel van de definities, postulaten en overige uitgangspunten die tot een axiomatisch-deductief stelsel leiden. De definities van punt, getal, ongelijkheid, enzovoort hebben dus misschien wel een kentheoretische oorsprong in de abstractie, maar construeren met elkaar een eigen domein dat niet meer afhankelijk is van die abstractie. Dat domein is op deze manier zelfstandig en bestaat dan ook afgezonderd van andere domeinen en is daarbij primair op zichzelf betrokken. De geometer heeft volgens Aristoteles dus gelijk om aan zijn domein realiteit toe te kennen.[13] Die realiteit is dus beslist niet afhankelijk van een platonische 'wereld van ideeën', waartoe wij middels een bijzondere vorm van intuïtie toegang zouden hebben. Dat domein wordt daarentegen door ons geconstrueerd terwijl het toch 'hylikoos' (υλικως)[14] kan zijn, waarbij het opmerkelijke is dat die 'materialiteit' ook tegelijk 'potentialiteit' betekent: geometrie gaat over de materialiteit van objecten, maar daarmee tegelijk ook in potentie over alle mogelijke objecten.[15] Vandaar dat de wiskundige wetenschappen zelfs over het schone en goede zouden kunnen gaan. Immers, het schone en goede hebben ook te maken met zaken als orde, proportie, bepaaldheid – onderwerpen van de wiskunde. Toch heeft Aristoteles de stap naar een ‘mathesis universalis’ helaas niet gemaakt, zoals we verderop zullen zien.

Middels abstractie afgeleid en dan geconstrueerd tot een zelfstandig domein dat ook toepasbaar blijkt in empirische kennis: dit is de ontwikkeling van de wiskundige objecten die Aristoteles moest aantonen. Hiermee samenhangende aspecten behandelt hij op verschillende plaatsen: in de metafysica gaat het dan om de ontologische status van die objecten, in zijn ‘psychologie’ over de relevante vermogens van de ziel. Interessant genoeg behandelt hij slechts kort het proces van abstractie aan het eind van zijn wetenschapstheoretische geschrift *De Analytica Posteriora*. Daar vormt die leer van de abstractie het sluitstuk van zijn omschrijving van de axiomatische methode als wetenschapsleer.

Blijkbaar is het voor Aristoteles volledig acceptabel om een wetenschapsleer te geven die zich vooral richt op interne consistentie en coherentie, terwijl de empirische of objectieve geldigheid niet door die wetenschapsleer zelf gegarandeerd kan worden en dus een beroep lijkt te doen op dat voorafgaande proces van abstractie. Die consistentie en coherentie van een wetenschap wordt gegarandeerd door principes, die zelf niet bewijsbaar zijn omdat ze juist ten grondslag liggen aan elke vorm van bewijs. Het gaat hierbij voornamelijk om de axioma’s, of de ‘gemeenschappelijke zaken’, of de ‘gemeenschappelijke meningen’ (κοιναι δοξαι) zoals de wet van de uitgesloten derde of het uitgangspunt dat wanneer we van een even getal een even getal aftrekken, er een even getal overblijft. Naast deze algemene axioma’s of bewijsprincipes moet zo’n axiomatische wetenschapsleer meer disciplinegebonden, specifieke definities en postulaten omvatten.[16] Die specifieke definities zijn voor de getalsleer of de geometrie weer anders dan voor een andere wetenschap. Voor de natuurwetenschap, meteorologie, retorica, metafysica, et cetera moeten steeds definities van het betreffende domein worden opgesteld als uitgangspunten van die wetenschappen.[17] Implicatie hiervan lijkt echter te zijn, dat er geen ‘transdisciplinaire’ wetenschap zoals de wiskunde kan bestaan. Omdat de ‘hyle’ of materie van een object van onderzoek geen wezenlijke kennis op kan leveren, is volgens Aristoteles een wiskundige benadering van dat object ook weinig zinvol.

1.5 WISKUNDIGE TOENADERING TOT DE EMPIRIE? KARDINAAL CUSANUS SCHIET TE HULP

Hoe invloedrijk de opvattingen van Plato en Aristoteles ook geweest zijn, ze hebben geen directe impuls gegeven tot de ontwikkeling van een 'mathesis universalis.' De eerste had immers de wiskundige objecten ondergebracht in een aparte zijnssfeer en de ander achtte die objecten slechts relevant voor een zeer beperkt en onwezenlijk aspect van de werkelijkheid. Natuurlijk heeft dat zelfs in de Oudheid een wiskundige en ingenieur avant la lettre als Archimedes er niet van weerhouden om op wiskundige wijze al menig natuurkundige wetmatigheid te geven. Inmiddels is de mathematisering van de wetenschap doorgedrongen tot werkelijk elke discipline: van genetica tot kwantummechanica, van sociologie tot systeembiologie. Die mathematisering zou echter waarschijnlijk eerder tot stand zijn gekomen als het denken over wiskunde na Plato en Aristoteles snellere ontwikkelingen had gekend.

Dan hadden we wellicht eerder kennis kunnen maken met 'Wiskundige Grondbeginselen van de Natuurfilosofie'. Nu kwam Newton met zijn maatgevende *Principia* pas in 1687. Zoals uit de titel al blijkt, behoren volgens Newton wiskunde en natuurwetenschap of wetenschapsfilosofie niet meer tot wezenlijk verschillende domeinen die zich moeilijk laten verenigen. Integendeel, de kennis van de natuur kan opgebouwd worden vanuit wiskundige grondbeginselen.[18] Het is evident dat tussen deze positie en de uitgangspunten van Plato en Aristoteles een behoorlijke kloof ligt die overbrugd diende te worden. Die brug bestaat niet zozeer uit wiskundige middelen, als wel uit andere begrippen van de natuur, het verstand, denken, wiskundige objecten en wetmatigheden. Hieraan hebben denkers van zeer uiteenlopende snit bijgedragen.

Om zichtbaar te maken welke denkstappen zoal gemaakt zijn, zal ik hieronder kort ingaan op een denker uit onverwachtse hoek: de theoloog, filosoof, wiskundige en kardinaal Nicolaus von Kues, ofwel Cusanus (1401-1464). De invloed van diens denkbeelden is moeilijk vast te stellen, hoewel 'er een omwenteling in het denken teweeg zou zijn gebracht, wanneer zij in de vijftiende eeuw door de beoefenaars van de vakwetenschappen waren overgenomen en in practijk gebracht' (Dijksterhuis 1950, p. 248). Wellicht is die invloed via een niet altijd zichtbare route verlopen maar hij is wel op invloedrijke plaatsen gearriveerd: 'jene Richtung der Naturbetrachtung, die, von Cusanus anhebend, über Leonardo da Vinci zu Galilei und Kepler weiterführt' (Cassirer, 1927). Een route die niet zozeer via dan nog jonge academies, universiteiten en theologische disputen verlopen is, maar langs een aantal van die breed geïnteresseerde en actieve personen die de Renaissance kenmerkt. In elk geval is het wetenschappelijke en wiskundige werk van Cusanus niet zozeer onder theologen en filosofen bekend, maar juist wel onder wetenschappers en wiskundigen, zoals blijkt uit het werk van bijvoorbeeld Descartes, Leibniz, Walter Raleigh en ook de Nederlander Christiaan Huygens. Het is dan ook niet zonder betekenis dat kardinaal Cusanus in verschillende dialogen een Leek aan het woord laat, die met zijn gezonde lekenverstand vaak dichter bij de waarheid komt dan de filosoof of redenaar die ook ter sprake komen.

In het denken van Cusanus over wiskunde vinden we een originele combinatie van aandacht voor de relatie tussen wiskunde en het menselijk kenvermogen enerzijds, en voor de metafysische status van de wiskundige objecten anderzijds. Over het menselijke verstand is Cusanus wel heel duidelijk: bij monde van de Leek betoogt hij dat het woord 'mens' van het woord 'mensurare' afgeleid is, dat 'meten' betekent (*De Mente*, I, p. 208). Die menselijke geest omschrijft Cusanus in analogie met de productieve geest van de Schepper: 'Het begrijpen door de goddelijke geest is het scheppen van de dingen; het begrijpen door onze geest is het begrip van de dingen' (*De Mente*, II, p. 220). Onze geest is verwant aan de goddelijke geest en kan via een soort aanpassing, assimilatie, zich een beeld vormen van de producten van die goddelijke geest. Wat in die goddelijke geest nog volledig samengebald aanwezig is, wordt in onze geest en de veelheid van diens beelden en begrippen weerspiegeld. Hierbij is volgens Cusanus geen sprake van abstractie die de begrippen en ook wiskundige concepten afleidt uit de natuur, zoals we bij Aristoteles tegenkwamen. De zintuiglijke wereld geeft de aanvankelijk slapende geest een zet om in beweging te komen, waarna die geest in zichzelf gelijkenis van alle geschapen dingen kan vinden. Die gelijkenis is daar door God als op een levende spiegel achtergelaten, zoals hij bijvoorbeeld deed met de maatverhoudingen bij de schepping van de hemel (*De Mente*, p. 232).

Dat verhoudingen of proporties van belang zijn voor het kennen van de werkelijkheid, leek ook Aristoteles al te beseffen, zoals we in het voorafgaande zagen. Toch bleef ook voor Aristoteles de wiskunde gericht op de (denkbare) materialiteit van de dingen en daardoor wezenlijk verschillend van de substantiële kennis, waarop wetenschap zich zou moeten richten. Plato en Aristoteles waren zich met betrekking tot kennis ook bewust van het belang van de relatie tussen de veelheid van dingen en waarnemingen enerzijds, en de 'samenvatting' van die veelheid in simpele begrippen, getallen of geometrische vormen anderzijds. Voor hen was die relatie problematisch, terwijl de Leek van Cusanus in dit verband een simpele maar doeltreffende stap neemt: 'het eerste oerbeeld, 'exemplar', in de geest van de Schepper is het getal. [...] Vandaar dat het getal het voortreffelijkste pad is om tot wijsheid te komen' (*De Mente*, 238). Waren voor Plato en Aristoteles de wiskundige objecten nog van secundair belang en moest kennis van de werkelijkheid vooral gebruik maken van woorden, begrippen en definities, bij Cusanus krijgt het getal juist een dergelijke cruciale functie toegemeten! Het is dan ook niet verwonderlijk dat de Leek met enig respect over de Pythagoreeërs spreekt.[19] Het getal, waarmee alle mogelijke verhoudingen en ook eenheid en veelheid zich zo goed laten uitdrukken, vormt de brug tussen de scheppende en denkende geest, tussen de geschapen veelheid en de scheppende eenheid.[20] Deze functie wordt ondersteund door het inzicht dat God bij de schepping van de wereld 'aritmetica, geometrie, muziek en tegelijk ook astronomie heeft toegepast. Van deze kunsten bedienen wij ons ook, wanneer we de relaties tussen de dingen en van hun elementen en van de beweging onderzoeken' (*De doct.ign.* II, 13). Cusanus verbindt dus ideeën over de productiviteit van de menselijke geest, de aanpassingsrelatie aan de geest van de Schepper en een bepaalde ontstaansmetafysica zodanig met elkaar, dat de status en de geldigheid van de wiskunde enorm aan belang kan winnen.

Interessant hierbij is het gegeven dat Cusanus niet alleen vanuit theologische overwegingen tot deze positie kwam. Opmerkelijk genoeg ging er ook van de wiskunde waarmee hij zich bezighield een invloed uit op deze metafysische gedachten. Cusanus schreef meerdere traktaten over de wiskunde, waaronder *De Mathematica Perfectione* en *De Circuli Quadratura*. Wiskunde figureert dus niet alleen als een terzijde in de vorm van metaforen en voorbeelden in zijn werk, maar krijgt ook afzonderlijke aandacht. Die aandacht richtte zich voornamelijk op klassieke, wiskundige problemen als de kwadratuur van de cirkel en de bepaling van het getal π.

Nu was het beslist niet gebruikelijk dat geleerden, laat staan theologen, zich destijds met wiskunde bezighielden. Immers, hoewel men graag de wijsheid van Salomo (11, 21): 'Omnia in mensura et numero et pondere deposuisti' citeerde – God heeft alles in maat, getal en gewicht geponeerd – toch had de menselijke geest geen toegang tot deze precieze getallen. Onze ontoereikendheid, onze wezenlijke 'andersheid' vergeleken met Gods geest maakte dat het zoeken naar wiskundige kennis eigenlijk een futiele aangelegenheid was. Sterker nog, een dergelijke curiositas kon makkelijk tot 'onvrome overmoed' leiden, zoals Augustinus vermaande (*Confess*. V, 3).

Om kort te gaan: zowel vanuit de antieke wijsbegeerte als vanuit de latere christelijke theologie bestond een grote reserve ten aanzien van wiskundige kennis van de werkelijkheid. Wetenschappers en theologen richtten zich eerder op conceptueel (verbaal) inzicht in de wezens van de afzonderlijke materiële zijnden of wijdden zich aan theologisch inzicht in de absoluut unieke aard van de Schepper. Wiskunde vormde zo een onbelangrijke nevenactiviteit van wetenschappers en theologen. Nu handhaaft Cusanus vanzelfsprekend ook een verschil tussen wiskunde en theologie, tussen kennis van de schepselen en kennis van de Schepper. Hij omschrijft die verschillen echter ook in wiskundige termen, waarmee hij de wiskunde een centralere plaats in dit verband geeft.

Met behulp van de wiskunde schetst Cusanus een relatie tussen schepselen en de Schepper als volgt: omdat de schepselen veranderlijk zijn en vanwege hun relationaliteit ook variërend in grootte, lijken ze onvergelijkbaar met de onveranderlijke en onbepaalbare Schepper. Cusanus suggereert echter een vergelijking tussen beide als tussen een kromme en een rechte lijn: een kromme lijn kan sterker of minder gebogen zijn, terwijl een rechte lijn niet een dergelijke variatie toelaat (*De doct.ign*. I, 13-16). Lijkt het hier te gaan om een wezenlijk onderscheid tussen schepsel en Schepper, in een andere visie op dergelijke figuren gaat Cusanus die relatie nog anders bepalen: wanneer we bijvoorbeeld een kromme of cirkel oneindig groot denken, 'limietloos', dan neemt de kromming af en zal die kromme uiteindelijk samenvallen met de rechte lijn. Wat wezenlijk verschillend leek, blijkt – wanneer de variatie tot in het oneindige wordt voorgesteld – juist overeenkomstig met elkaar; schepsel en Schepper kunnen toch in relatie tot elkaar worden gedacht.

Zonder hier in te gaan op het gebruik van het complexe begrip van het oneindige door Cusanus, is het belangrijk om te beseffen dat hier een cruciale denkbeweging wordt gemaakt. Onder erkenning van de eigenheid van de sfeer der schepselen ten opzichte van de Schepper blijkt de wiskunde toch een manier te bieden om de relatie tussen beide te denken. Daarbij blijft weliswaar een verschil tussen beide sferen bestaan, maar dat wordt ook in wiskundige termen omschreven. Wezenlijk daarvoor is dat in een wiskundige benadering onvolledigheid en onnauwkeurigheid geen redenen meer vormen om die wiskunde als geheel af te wijzen, integendeel. Elders maakt Cusanus bijvoorbeeld ook gebruik van de zogenaamde exhaustiemethode om het oppervlak van een cirkel te bepalen. Deze methode werd al in de Oudheid, onder andere door Archimedes, ontwikkeld en bestaat uit het intekenen van steeds meer driehoeken of rechthoeken in een cirkel of kromme. Op die manier kan steeds nauwkeuriger het oppervlak binnen de kromme worden bepaald, hoewel het bij een benadering blijft.

In het *Compendium*, dat waarschijnlijk uit zijn sterfjaar stamt, geeft Cusanus een intrigerende metafoor waarin dit element van toenemende nauwkeurigheid gecombineerd wordt met een uitgesproken empirische houding. Het gaat om de vergelijking van de mens als 'animal perfectum' – want uitgerust met zintuigen en intellect – met een kosmograaf die een kaart van de wereld fabriceert (*Comp*. VIII). Daartoe gebruikt de kosmograaf de berichten van zijn zintuigen, die hem alle mogelijke informatie over de wereld bieden. Die berichten gebruikt hij ook om zijn kaart steeds preciezer en waarachtiger te maken. De ordening en verwerking van die informatie vindt echter plaats in zijn intellect, waarmee hij zich in een soort afbeeldingsrelatie tot de geest van de Schepper bevindt: de geestelijke creativiteit van de kosmograaf is een afspiegeling van de productiviteit van de geest van de Schepper.[21] Hier is dus geen sprake van een waardeloze, onnauwkeurige kennis die voortvloeit uit de onvrome overmoed van een wezenlijk tekortschietende, menselijke geest. Integendeel, met een toenemende nauwkeurigheid kan een beeld van de wereld geschapen worden dat direct verwijst naar de productiviteit van de goddelijke geest, die de bron van die wereld is – inclusief de afbeelding ervan. Dat een dergelijke visie opgang maakte in de moderne wetenschap moge blijken uit Newtons opmerking:

> … that I might show that the analogy between the divine faculties and our own may be shown to be greater than has formerly been perceived by philosophers. That we were created in God's image, holy writ testifies. And his image would shine more clearly in us if only he simulated in the faculties granted to us the power of creation in the same degree as his other attributes (Newton: ed. A. Janiak, 2004, p. 30).

1.6 WISKUNDE: EEN CULTUURGESCHIEDENIS?

Net als over Plato en Aristoteles, valt er ook over Cusanus veel meer te zeggen – alleen al over diens opvattingen over de wiskunde. Toch hoop ik voor het onderhavige kader duidelijk te hebben gemaakt welke conceptuele stappen Cusanus gemaakt heeft en hoe dergelijke stappen de status van de wiskunde als (hulp-)wetenschap enorm vooruit geholpen hebben. Hoewel de invloedsfeer van Cusanus moeilijk vast te stellen blijkt, heeft zijn werk bijgedragen aan de bestrijding van bezwaren tegen de onnauwkeurigheid van de wiskunde en tegen het feit dat wiskundige kennis slechts over de materialiteit van de dingen zou gaan of juist alleen over ideële objecten. Wiskunde als wetenschap van het getal en van de relaties tussen getallen is volgens Cusanus bij uitstek geschikt om de werkelijkheid mee te leren kennen. Hoewel hij zelf waarschijnlijk in beperkte mate aan onderzoek heeft gedaan, onder andere met behulp van een weegschaal, is het vermeldenswaard dat het woord 'experimental science' onder uitdrukkelijke verwijzing naar Cusanus in het Engels ingevoerd werd.[22] De bekende alchemist en wiskundige John Dee geeft daarbij in 1570 een opvatting van de experimentele wetenschap à la Cusanus weer, die goed overeenkomt met de 'scienza nuova', zoals Galilei die later zal propageren. Zo goed als een bepaald begrip van de wiskunde een rem kan vormen op de ontwikkeling van die wiskunde en het gebruik ervan in andere domeinen, zo kan een begripswijziging daarvoor juist een stimulans vormen.

Natuurlijk zijn er nog veel meer begripsontwikkelingen te noemen, die hebben bijgedragen aan de ontplooiing van de wiskunde. Zo is bijvoorbeeld de invoering van het begrip 'functie' van groot belang geweest: in plaats van het kenmerken van iets door middel van één concreet getal, kan een functie in een keer alle mogelijke waardes aanduiden die een bepaalde eigenschap (van een figuur of een grootheid) kan aannemen. Verder wordt het rekenen met onbekende getallen in de algebra van belang en openen de differentiaal- en integraalrekening een wereld van nieuwe mogelijkheden – zoals uit hoofdstuk 5 van dit boek zal blijken. Deze conceptuele vondsten helpen de wiskunde steeds om meerdere gegevens of structuren 'samen te vatten'.

Toch is het niet zo, dat de geschiedenis van de wiskunde heeft geleid tot de ontwikkeling van een steeds verder uitgewerkt, samenhangend stelsel dat langzamerhand volledig, coherent en consistent is. Dit heeft meer te maken met het feit dat wiskunde misschien wel meer gemeen heeft met cultuur en dus ook met de soms onvoorspelbare ontwikkelingen ervan, dan men geneigd is te denken. Een aantal van de moderne ontwikkelingen heeft aangetoond dat een volledig consistent en coherent stelsel domweg niet mogelijk is of dat een consistent en coherent stelsel berust op een voorwaarde die buiten dat stelsel zelf ligt. Natuurlijk zijn we bij Plato en Aristoteles tegengekomen dat voor de oorsprong van wiskundige objecten verwezen kan worden naar speciale intuïties of abstracties, ongeacht de strengheid van het stelsel waarin de zo verkregen punten of getallen functioneren. Maar zo'n 75 jaar geleden is door Kurt Gödel aangetoond dat de strengheid van zo'n samenhangend stelsel van uitgangspunten en bewijzen niet kan worden gedemonstreerd met de procedures van dat stelsel zelf.[23] Deze onvolledigheidsstelling is in zekere zin symptomatisch voor moderne ontwikkelingen waarbij voorheen compleet geachte gebieden van de wiskunde toch bleken te kunnen worden onderverdeeld in onderling incompatibele wiskundige stelsels. Zo was al eerder gebleken dat de euclidische meetkunde niet de enige, denkbare meetkunde was: er is ook een niet-euclidische meetkunde mogelijk, waarin een driehoek bijvoorbeeld geen 180 graden bezit. Beide stelsels zijn consistent, maar niet met elkaar verenigbaar. Dat betekent dat de wiskunde moet werken met stelsels die voor hun consistentie afhankelijk zijn van externe postulaten en bovendien, dat voor sommige objecten (zoals de ruimte) meerdere stelsels mogelijk zijn. Het is evident dat daarmee niet alleen de vraag naar de aard van het wiskundige object, maar ook naar de status van waarheid in de wiskunde extra problematisch werd.[24] Op meerdere manieren is dus gebleken dat een zelfstandige, complete, coherente en consistente wiskunde principiëel onbereikbaar is.

Hoewel er natuurlijk nog steeds pogingen worden ondernomen om de eenheid van de wiskunde te funderen door bijvoorbeeld de ontwikkeling van een onderliggende en gemeenschappelijke logica, is het voor veel wiskundigen en filosofen onontkoombaar om het beeld van de wiskunde bij te stellen. Daartoe worden verschillende wegen bewandeld, die bijvoorbeeld verwijzen naar de oorsprong van wiskundige objecten of structuren. Platonisme – dat verwijst naar een apart domein van wiskundige structuren – en empirisme zijn in het denken over de wiskunde nog steeds te vinden. Naast die traditionele posities zijn er meer recent ook pleidooien die wijzen op de sociale of cultuurhistorische kant van de wiskunde. Daarbij gaat het niet alleen om het toevallige feit dat wiskunde ontwikkeld wordt door personen die wiskunde bedrijven, maar wordt erop gewezen dat de inhoud en structuur van de wiskunde wezenlijk bepaald worden door de gemeenschappelijke inzichten en praktijken van die wiskundigen. Zijn we inmiddels al wel gewend aan analyses van de natuurwetenschap vanuit het gezichtspunt van paradigma's of van onderzoeksprogramma's, in de wiskunde verwachten we dit niet zozeer. Toch wordt er ook in dat verband gesproken van een 'cultural intuition of the mathematical community' als laatste fundament van de wiskunde (Wilder, 1981) of van wiskunde als de 'study of the lawful, predictable parts of the social-conceptual world' (Hirsch, 1995).[25]

Gezien deze benadering is het natuurlijk niet verbazingwekkend dat er ook vanuit de cognitiewetenschap een duit in het zakje wordt gedaan.[26] Wiskundige concepten worden daar wel benaderd als voorbeelden van 'embodied cognition': belichaamde kennis. Daarbij worden de eigenschappen van concepten gerelateerd aan de eigenschappen van functionele netwerken in ons brein. Zo kan met breinonderzoek worden aangetoond dat bepaalde aspecten van concepten, zoals hun ruimtelijke oriëntatie, door separate netwerken worden verwerkt. In plaats van een platonische of meer empirische opvatting over de aard van wiskundige objecten, kan dus ook worden gepleit voor het traceren van de cognitieve bron van de concepten omtrent die objecten. Daarmee blijven echter vragen naar de ontologische status van een meetkundig object of de waarheidsfunctie van een uitspraak als 'er is geen grootste priemgetal' onbeantwoord. In zoverre verdient dergelijk onderzoek een positie die vergelijkbaar is met de plaats die Aristoteles in de laatste passages van zijn *Analytica Posteriora* geeft aan het proces van abstractie: interessant maar niet van wezenlijk belang.

Naast de vergelijking met de natuurwetenschap als sociale onderneming, wordt er ook gewezen op het feit dat de incompleetheid van de wiskunde haar vergelijkbaar met de empirische natuurwetenschap maakt. Immers, zoals we axioma's niet absoluut kunnen funderen, zo zijn de beginwaarden van de Oerknal ons volkomen onbekend, zodat we nooit een volledige beschrijving van de natuurwetmatigheden kunnen geven. Zelfs de wetenschapsfilosoof en voormalig logisch positivist Carnap meende dat wiskunde en natuurkunde een verre eigenschap deelden: 'the impossibility of absolute certainty' (Geciteerd door Imre Lakatos, op.cit. 202).

Het kluster van problemen dat in de Oudheid al speelde, lijkt nog steeds als een veelkoppig monster te heersen: de kentheoretische oorsprong van onze wiskundige concepten, de formele geldigheid van een wiskundige bewijsvoering, de 'effectiviteit' van wiskundige kennis in de empirische wetenschappen – al deze kwesties in één keer oplossen, is een onmogelijke taak. De groei en toepasbaarheid van wiskundige kennis wordt daar echter niet al te zeer door gehinderd, zoals verderop in dit boek zal blijken. Juist vanwege die groei en toepasbaarheid is het wel van belang om de fundamentele beperkingen van de wiskunde niet uit het oog te verliezen.

NOTEN

1. Fred Spier: 'How Big History Works: Energy Flows and the Rise and Demise of Complexity.' In: *Social History & Evolution (4, 1, 2005)*, 'Uchitel' Publishing House, Moskou.
2. Dat neemt niet weg dat we kunnen spreken van verschillende vormen van 'existentie' in de wiskunde: zo kan bijv. bewezen worden dat een bepaald wiskundig object wel moet bestaan, of kan bewezen worden dat het niet-bestaan van een object moet leiden tot contradicties, of kunnen we een oneindige reeks cijfers postuleren. Friedrich Waismann onderscheidt minstens zes verschillende vormen in 'On the Notion of Existence in Mathematics', in: *Lectures on the Philosophy of Mathematics*, Rodopi, A'dam 1982.
3. D. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press 1999, Oxford, besteedt uitgebreid aandacht aan dit opschrift. Dit opschrift heeft gemeen met veel andere bronnen van de antieke wiskunde dat ze pas zo'n 700 jaar later ontstaan.
4. Barrow (1992, p. 120) vergelijkt de impact van deze ontdekking door de

Pythagoreeërs met de impact van Gödels theorema's.

5. Die negatieve opvatting heeft zijn pendant in de opvatting over de oorsprong van het wiskundige object, meent ook Hersch: 'Plato, Descartes, Frege knew that two is an ideal object. They explained what they meant by an ideal object only in negative terms – not mental, not physical. I'm pointing out that these abstract ideal objects are social concepts.' Genoemde auteurs zouden het vanzelfsprekend oneens zijn met deze opvatting (Hersch, Rueben. 'Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics', *Phil.of Math*. 1995, p. 593).
6. 'Van [de meetkunde en aanverwante vakken] zien we hoe ze wel een droomgezicht hebben van het zijnde, doch tevens hoe zij er niet toe kunnen komen een klaarwakkere kijk te krijgen op dit zijnde, zolang zij hypothesen geruiken en die zo maar ongemoeid laten, uit onmacht om daar rekenschap van te geven' (*De Staat*, 533 c).
7. Paul Bernays munt de term wiskundig 'Platonisme' door het te omschrijven als een tendens om de wiskundige objecten te beschouwen onder volledige afzondering van het reflecterende subject. 'On platonism in mathematics' (1934) in P. Benacerraf & H. Putnam (1983, p. 259).
8. Wigner, E. 'The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in Natural Sciences' in: *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960, p. 14. N.D. Goodman wijst er in zijn kritiek op, dat we evengoed kunnen spreken van 'the unreasonable effectiveness of physics in engineering', omdat de natuurkunde ook uitgaat van veronderstellingen – van vacuüm of een ideaal gas of een perfecte isolatie, bijvoorbeeld- die in de ingenieurspraktijk niet voorkomen. Veelzeggend is overigens de titel van zijn artikel: 'Mathematics as Natural Science', *J.Symbolic Logic*, 55:1, 1990, p 188.
9. Overigens hoogstwaarschijnlijk onderwezen in de wiskunde door leerlingen van Plato –volgens Thomas Heath in zijn commentaar bij *Euclid's Elements*, Dover Publications 1956, p. 2.
10. Geoffrey Lloyd stelt dat het waarschijnlijk is dat in de antieke oudheid strikt deductieve bewijsvoering eerder voorkwam in de filosofie dan in de wiskunde. *Magic, Reason and Experience*, Cambridge UP 1979, p. 110.
11. De wetenschapsfilosoof en wiskundige Lakatos heeft dan ook bepleit dat er in de wiskunde meer gezocht moet worden naar falsifiërende uitspraken, net zoals dat in de natuurkunde gedaan wordt. Er bestaan bijvoorbeeld in de wiskunde vermoedens, die niet volledige bewijsbaar zijn maar waarvoor een enkel tegenvoorbeeld wel afdoende zou zijn. Zo

zou het bestaan van een enkel even getal dat niet door het optellen van twee priemgetallen kan worden bereikt (2=1+1; 4=3+1; etc.) het zgn. 'vermoeden van Goldbach' weerleggen. (I.L.Lakatos, 'A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics' ibid. *BritJPhilSci* 27, 1976, p. 205.)

12. J. Lear spreekt van een 'predicate filter' dat Aristoteles loslaat op bijv. een bronzen gelijkzijdige driehoek. ('Aristotle's Philosophy of Mathematics', *Philosophical Review*, 1982, p. 168)
13. In zijn boek over 'De Hemel' stelt Aristoteles dat er immers onderscheid bestaat tussen een punt, lijn of vlak en het object van de natuurwetenschapper, omdat die geometrische objecten geen enkele zwaarte bezitten, terwijl het natuurwetenschappelijke object dat wel heeft. (*De Caelo*, 299 a 27 – b 7)
14. In contrast met fysische objecten betreffen de wiskundige objecten 'onbeweeglijke zaken, die echter niet afgezonderd bestaan, maar alsof ze in een stof zijn.' (*Metaf.* 1026 a 14)
15. Elders legt hij uit dat materialiteit op zichzelf onkenbaar is, maar dat ze deels zintuiglijk waarneembaar is en deels als denkbare materialiteit bestaat; de denkbare materialiteit is in de zintuiglijk waarneembare materialiteit aanwezig maar niet voor zover die zintuiglijk waarneembaar is, zoals bij de wiskundige objecten. (*Metaf.* 1036 a 6) Abstractie is dan het afzonderen van de denkbare materie van de waarneembare materie.
16. Heath merkt op dat we via Aristoteles waarschijnlijk het beste begrip krijgen van wat Euclides bedoelde met postulaat en axioma. (Euclid, *The 13 books of the Elements*, vol I, p. 124)
17. Ondanks deze cruciale beperking tot specifieke domeinen heeft de axiomatische methode een enorme invloed gehad. Gezien het feit dat Aristoteles zelf echter van die axiomatische methode nauwelijks gebruik maakt in zijn overige wetenschappelijke werk, lijkt het plausibel dat hij de methode vooral van belang achtte als didactisch hulpmiddel, als methode voor het demonstreren van de opgedane kennis. Een dergelijke reconstructieve functie is ook nog terug te vinden in 1918 wanneer een van de invloedrijkste wiskundigen, David Hilbert, stelt: 'Ich glaube: Alles, was Gegenstand des wissenschaftlichen Denkens ueberhaupt sein kan, verfaellt, sobald es zur Bildung einer Theorie reif ist, der axiomatischen Methode und damit mittelbar der Mathematik.' ('Axiomatisches Deuten', in: *Gesammelte Abhandlungen*, Band III. Julius Springer Verlag, Berlijn 1935, p. 156.)

    Michael J. Crowe vraagt zich ook af, of axiomatisering van een domein niet eerder een van de laatste fases van zijn ontwikkeling is, in plaats van een van de eerste fases ('Ten Misconceptions about Mathematics and Its History' in W. Aspray & P. Kitcher ed., *History and Philosophy of Modern Mathematics*, University of Minnesota Press 1988,p. 266).

18. Een meer wijsgerige verhandeling hierover verscheen een kwart eeuw eerder in Amsterdam, nl. Spinoza's *Descartes' Principes van de filosofie, op geometrische wijze gefundeerd* uit 1663. Spinoza schrijft dan ook in zijn *Theologisch Politieke Tractaat* (uit 1670) dat de natuur – waartoe ook de mens gedeeltelijk behoort – wetmatig functioneert.
19. Zie ook *De Docta Ignorantia*, I, 1, waar hij instemmend stelt: 'Daarom kwam Pythagoras tot het oordeel, dat alles middels de kracht van het getal geordend en gekend kan worden.'
20. Getal kan samenvatten wat samen hoort en ook onderscheiden wat verschillend is. (Cf. *De Mente* X, 266)
21. Dit idee van mathematische objecten als producten van de menselijke geest lijkt Cusanus gemeen te hebben met de latere 'intuïtionist' Brouwer, zoals Erik Heijermans betoogt in een ongepubliceerd manuscript.
22. Zie daarvoor F. Nagel, *Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften*, Münster 1984, p. 145
23. Deze formulering is ontleend aan J. von Neumann, 'The Mathematician', op.cit. 2034.
24. Hoewel bijvoorbeeld H. Putnam de zogenaamde crisis in de wiskunde wilde bezweren door te onderscheiden tussen discussies over wiskundige objecten of verzamelingen enerzijds en de mogelijkheid of noodzakelijkheid van een bepaalde wiskundige stelling anderzijds. Al doende bepleit hij een 'Mathematics without foundations' in: Putnam & P. Benacerraf eds.: *Philosophy of mathematics*, Cambridge UP 1983.
25. Wilder, Raymond L. 'Laws governing the evolution of mathematics' in: *Mathematics as a Cultural System*, Pergamon Press 1981.
    Hersch, Rueben. 'Fresh Breezes in the Philosophy of Mathematics', *Phil.of Math*. 1995.
26. Zie onder andere George Lakoff & Rafael E. Núñez (2000). *Where Mathematics Comes From – How the Embodied Mind brings Mathematics into Being*, New York: Basic Books.

LITERATUUR

Benacerraf, P. & H. Putnam (eds.) *Philosophy of Mathematics. Selected readings*. Cambridge University Press, 1983.

Barrow, J.D. *Pi in the Sky*.Clarendon Pres, Oxford 1992.

Cassirer, E. *Individuum und Kosmos in der Philosophie der Renaissance*. Teubner, Leipzig 1927.

Cusanus. *Compendium : kurze Darstellung der philosophisch-theologischen Lehren*. ed. B. Decker en K. Bormann, Meiner Verlag, Hamburg, 1970.

Cusanus. *De docta ignorantia/ Die belehrte Unwissenheit*. ed. H.G. Senger, R. Klibansky en P. Wilpert, in 3 delen, Meiner Verlag, Hamburg 1964.

Cusanus. *De Mente*, Aanhangsel bij Cassirer, 1927.

Dijksterhuis, E.J., *De mechanisering van het wereldbeeld*, Meulenhoff 1950.

Jacquette, D. (ed.) *Philosophy of Mathematics. An Anthology*. Blackwell Publishers, Oxford 2002.

Mansfeld, Jaap (ed.) *Die Vorsokratiker*. Reklam Verlag, Stuttgart 1987.

Newman, J.R. (ed.) *The World of Mathematics*, Tempus books, Washington 1988, 4 delen, eerste druk 1956, Simon and Schuster, New York.

Newton, Isaac. *Philosophical Writings*, ed. A. Janiak. Cambridge University Press, 2004.

Struik, D. Geschiedenis van de wiskunde. Het Spectrum, Utrecht 1990. (Oorspr. *A concise History of Mathematics*, Dover 1948.)

Swart, H.C.M. de. *Filosofie van de wiskunde*. Martinus Nijhoff, Leiden 1989.

2

Enkele aspecten van de wiskunde in de Griekse oudheid

*Albert Grootendorst**

2.1 VAN HOE NAAR WAAROM

De periode van opkomst, bloei en verval van de Griekse wiskunde strekt zich uit van circa 585 v. Chr. tot circa 500 n. Chr. Het beeld dat we van deze periode hebben, wordt sterk bepaald door de *Elementen* van Euclides (circa 300 v. Chr.). Euclides presenteerde een streng systematisch opgebouwd deductief systeem, gebaseerd op definities, (constructie-)postulaten, dat wil zeggen een lijst van toegestane constructies waarbij aan passer en liniaal een exclusieve rol is toebedeeld, en axioma's. Hieruit leidde hij dan in strakke volgorde stelling na stelling af. Een belangrijk verschil met de culturen waaruit de Grieken geput hebben, is dat Euclides vindt dat hij nog niet klaar is als hij de oplossing van een probleem in stappen uiteengelegd heeft. Terwijl de Egyptische en Mesopotamische wiskunde bestaat uit een grote verzameling procedures ('Neem dit getal, bereken zijn vierkant…') komt bij Euclides na het beschrijven van de procedure een zeker zo belangrijk onderdeel, namelijk het aantonen dat de procedure correct is (het 'bewijs'). De Grieken maakten de overstap van HOE naar WAAROM.

---

* Prof.dr. A.W. Grootendorst, in leven hoogleraar aan de Technische Universiteit Delft, heeft tot zijn overlijden op 22 december 2004 aan dit hoofdstuk gewerkt. De tekst is voor publicatie gereed gemaakt en voorzien van een epiloog door Jan van Maanen.

Deze traditie was al ruim voor Euclides begonnen, maar zijn *Elementen* is het eerste complete werk in deze stijl dat ons is overgeleverd en de invloed was enorm: meer dan tweeduizend jaren hebben Euclides' *Elementen* niet alleen het onderwijs in de wiskunde beheerst, maar ook de stijl van redeneren buiten de wiskunde beïnvloed. De *Ethica* van Spinoza, om maar één voorbeeld te noemen, volgt de stijl en compositie van de *Elementen* op de voet. Kritische lezers van de *Elementen* hebben in de loop der eeuwen een aantal zwakke plekken aangewezen, waaraan men tot in de twintigste eeuw reparaties heeft verricht. De oorspronkelijke bijdragen van Euclides zelf zijn beperkt, maar zijn verdiensten worden hoog aangeslagen; Proclus (410-485) beschrijft Euclides in zijn opsomming van antieke mathematici als volgt (Morrow, 1970):

> Euclides, die de Elementa samenstelde, veel van de resultaten van Eudoxus samenvatte, veel voltooide van wat Theaetetus was begonnen en de minder strenge bewijzen van zijn voorhangers in een niet te weerleggen vorm bracht.

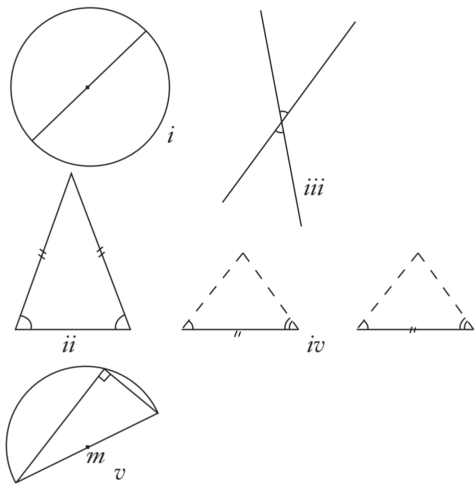
De bedoeling van dit hoofdstuk is het beeld dat bij velen leeft over de wiskunde bij de Grieken enigszins bij te stellen en aan te vullen. Twee aspecten zullen op de voorgrond treden. Enerzijds zijn dat de meetkundige problemen die de Grieken zich stelden, en de observatie dat ze pas tevreden waren als ze met een redenering vanuit de grondbeginselen de juistheid van de constructie konden aantonen. Anderzijds zijn er filosofische vragen, die sterke interactie hadden met de structuur van de wiskunde. Zowel vragen over de status van gehanteerde begrippen als normatieve vragen over het oplossingsproces hadden grote invloed op de wiskundige inhoud.

2.2 DE GRONDLEGGER: THALES

Als eerste Griekse wiskundige noem ik Thales van Milete, één van de 'zeven wijzen' uit de Griekse oudheid. Naar men zegt, heeft hij – op grond van de regelmaat in Babylonische tabellen waarin de standen van zon en maan werden bijgehouden – de zonsverduistering van 585 v. Chr. voorspeld. Ook wordt hem een vijftal meetkundestellingen toegeschreven en wel de volgende:

i. Een cirkel wordt door een middellijn in twee gelijke delen verdeeld.
ii. In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk.
iii. Bij snijding van twee rechte lijnen zijn de overstaande hoeken gelijk.
iv. Twee driehoeken met gelijke bases en gelijke basishoeken zijn geheel gelijk (dat wil zeggen congruent).
v. De omtrekshoek in een halve cirkel is recht (in het meetkundeonderwijs heet deze uitspraak nog steeds de ‘Stelling van Thales’, zie ook figuur 2.1 en Diels, Kranz, 1974).

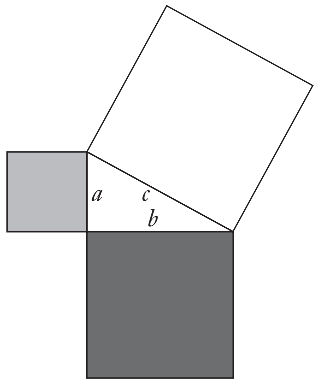
Deze bescheiden hoeveelheid stellingen vormde het begin van het zoeken naar het WAAROM. Stelling II bijvoorbeeld, over de gelijkbenige driehoek, wijst op het principe van symmetrie dat altijd in dit type driehoeken gebruikt kan worden, hoe lang de gelijke zijden ook zijn en hoe groot de tophoek ook is. Thales legde met deze kleine collectie de basis voor de Griekse meetkunde, die op haar beurt de basis vormt voor onze huidige meetkundekennis.



Figuur 2.1: De vijf stellingen van Thales.

2.3 VIERKANTEN EN STEENTJES: PYTHAGORAS

De volgende stap voert ons naar Pythagoras (circa 580-490), bij velen bekend door de stelling die weliswaar zijn naam draagt maar niet aan hem kan worden toegeschreven:



Figuur 2.2: Stelling van Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$)

In een rechthoekige driehoek is de som van de kwadraten van de rechthoekszijden gelijk aan het kwadraat van de schuine zijde (zie figuur 2.2).

Aangezien Pythagoras zelf niets op schrift gesteld heeft – vermoedelijk om redenen van geheimhouding – zijn wij voor gegevens over zijn denken aangewezen op secundaire bronnen, met name op Aristoteles (384-322).

Na zijn basisvorming op Samos en in Milete (onder meer bij Thales) maakte Pythagoras zijn 'grand tour', die hem naar Phoenicië, Egypte en Babylonië bracht. Hij maakte zich daar kennis eigen op allerlei gebied, in de wiskunde onder andere de bovengenoemde stelling, en stichtte in 529 v. Chr. in het Zuid-Italiaanse Croton een aan Apollo gewijde, zeer elitaire school. Deze school, die ook wel als religieuze gemeenschap wordt gekarakteriseerd en waartoe zowel mannen als vrouwen behoorden, kende vijf generaties volgelingen. In de eerste eeuw van onze jaartelling herleefde het pythagorisme in het neo-pythagorisme, dat uiteindelijk opging in het neo-platonisme. De leerlingen waren verdeeld in twee groepen: acusmatici en mathematici. De eerste was het te doen om leefregels, de tweede groep kwam er voor de wiskunde.

In de school lag het voornaamste accent op de natuurlijke getallen 1, 2, 3, … et cetera. Dit blijkt uit zeer krasse uitspraken die daarover door de leerlingen zijn gedaan (zie Diels, Kranz, 1974):

> Inderdaad heeft alles wat men kan kennen een getal, want het is niet mogelijk iets te begrijpen of te kennen zonder het getal (Philolaus).

en:

> Wij leven door getal en berekening, deze redden de stervelingen (Chrysogonos).

Dit leidde tot de gedachte dat het heelal mathematisch is geconstrueerd en dat men dus wiskunde moet bedrijven om de bedoeling van de goden en van de natuur te doorgronden. Deze gedachte bleef ook lange tijd de drijvende kracht achter de beoefening van de wiskunde. Vandaar ook dat bij de bestudering van de Griekse beschaving de ontwikkeling van de wiskunde een essentieel onderdeel behoorde te zijn. Galilei zou in 1623 in *Il Saggiatore* de Griekse opstelling aldus verwoorden:

> 'Het boek van de natuur is geschreven in de taal van de wiskunde.'

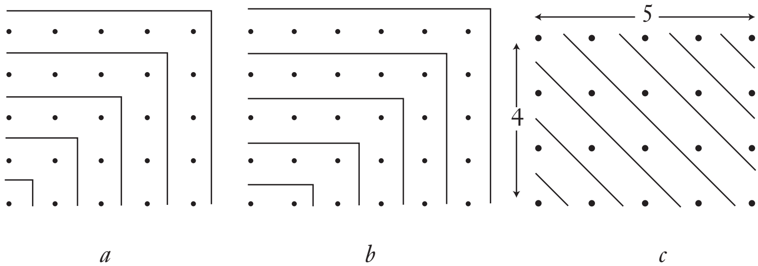
Kader 2.1: Naamgeving en eigenschappen van getallen.

Voordat we verder gaan, is een intermezzo over de verschillende eigenschappen die getallen kunnen hebben en over de gebruikelijke naamgeving op zijn plaats. Voor Pythagoras waren de *natuurlijke* getallen het fundament van natuur en denken. Het zijn de getallen waarmee je onderscheidbare zaken telt (bijvoorbeeld het aantal mensen in een boot). Pythagoras telde 1, 2, 3, et cetera.; tegenwoordig beginnen de meeste scholen de natuurlijke getallen bij 0. Notatie: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, waarin de accolades aankondigen dat er een verzameling volgt en de puntjes aangeven dat het patroon willekeurig ver voortgezet moet worden. De natuurlijke getallen kunnen op allerlei manieren uitgebreid worden, bijvoorbeeld met de negatieve gehele getallen, zoals –1 of –7. Tezamen vormen de natuurlijke getallen en de negatieve gehele getallen de verzameling van de *gehele* getallen $\mathbb{Z}$, die dus in twee richtingen willekeurig ver doorloopt: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$. Hierna komen de getallen die te schrijven zijn als breuk van twee gehele getallen: $\frac{\text{teller}}{\text{noemer}}$, waarbij de noemer niet gelijk is aan 0. Dit zijn de *rationale* getallen $\mathbb{Q}$. Alle elementen van de verzameling $\mathbb{Z}$ komen ook in de verzameling $\mathbb{Q}$ voor. Het is wat lastiger om $\mathbb{Q}$ te noteren met accolades en puntjes, maar het is wel mogelijk. Hebben we nu alle getallen gehad? Voor praktische doeleinden wel. Als je je gewicht wilt opgeven, of de lengte van een stuk hout wilt noteren, dan voldoet $\mathbb{Q}$ uitstekend. Je resultaat is dan zoiets als 82,4 (kg, cm, etc.) en dit staat voor $824/10 = 412/5$ en is duidelijk een getal uit $\mathbb{Q}$. Als je evenwel geen genoegen neemt met een benadering, en je wilt precies en principieel zijn, dan kom je er niet met de rationale getallen. Is er bijvoorbeeld een getal dat, met zichzelf vermenigvuldigd, 2 oplevert? Het zou meer dan 1 moeten zijn, want $1 \cdot 1 = 1$ en dat is te weinig. Maar het is ook kleiner dan 2, want $2 \cdot 2 = 4$ en dat is te veel. Met wat rekenen vind je uit dat dit getal tussen 1,4 en 1,5 moet liggen, of tussen 1,41 en 1,42. Maar met deze benaderingen kom je er niet. Het getal dat, met zichzelf vermenigvuldigd, 2 oplevert, noemen we 'wortel twee' (kortweg $\sqrt{2}$), en in de *Elementen* van Euclides is reeds te vinden dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is. Het wordt *irrationaal* genoemd. Zulke irrationale getallen komen wel 'in de natuur' voor (zo heeft een vierkant van 1 bij 1 een diagonaal met lengte $\sqrt{2}$), maar ze zijn *niet* de verhouding van twee gehele getallen. De rationale getallen en de irrationale getallen vormen tezamen de verzameling van de *reële* getallen $\mathbb{R}$. Bij $\mathbb{R}$ doet zich het merkwaardige verschijnsel voor dat er te veel elementen zijn om ze met accolades en puntjes te kunnen noteren (een conclusie van de Duitse wiskundige Cantor, 1845-1918). De ontdekking van irrationale verhoudingen deed de Griekse wiskunde op zijn grondlagen schudden, zoals we hieronder zullen beschrijven.

We keren terug naar de school van Pythagoras. Over de wijze waarop daar gerekend werd, worden we ingelicht door Aristoteles (*Metafysica* 1092b, 11-12):

> ...daarbij steentjes gebruikend, zoals degenen die getallen gestalte geven in de vorm van de driehoek en het vierkant.

Dit rekenen met steentjes staat bekend als 'psèphos-arithmetiek' (psèphos is ψηφος, en dit betekent steentje); denk hierbij ook aan het woord 'calculus', dat afgeleid is van 'calx' (steentje). Eenvoudig gezegd, komt het erop neer dat men met behulp van steentjes een figuur uitlegt, het aantal steentjes op twee manieren telt en zo tot een stelling komt.



Figuur 2.3: Het sommeren van de eerste *n* oneven getallen (a), even getallen (b) en natuurlijke getallen (c).

Kader 2.2: Voorbeeld psèphos-arithmetiek.

Indien men in figuur 2.3a de aanwezige steentjes telt volgens de getekende winkelhaken (gnomons), dan vindt men voor het totaal aantal steentjes de som van de eerste vijf oneven getallen: 1 + 3 +5 + 7 + 9. Anderzijds ziet men direct in dat het gaat om 5×5 steentjes. De som van de eerste vijf oneven getallen is dus juist 5×5. Uit de structuur van het diagram volgt dat hier een algemeen principe achter zit: de som van de eerste *n* oneven getallen is n^2.

Met een soortgelijke redenering leest men uit figuur 2.3b af dat de som van de eerste vijf even getallen gelijk is aan 5×6 en 'dus' de som van de eerste *n* even getallen gelijk is aan $n(n+1)$. Ten slotte leert figuur 2.3c dat

$$2(1 + 2 + 3 + 4) = 4\times 5 \text{ en 'dus' } (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Zo kan men ook met enkele slimme trucjes sommen van kwadraten en sommen van derde machten berekenen en vindt dan bijvoorbeeld:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = (2 \cdot 5 + 1)\,\frac{(1 + 2 + 3 + 4 + 5)}{3} = \frac{1}{3}\,(2 \cdot 5 + 1)\,\frac{5(5+1)}{2}$$

(de laatste stap volgt uit figuur 2.3c) en

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = \left\{\frac{5(5+1)}{2}\right\}^2$$

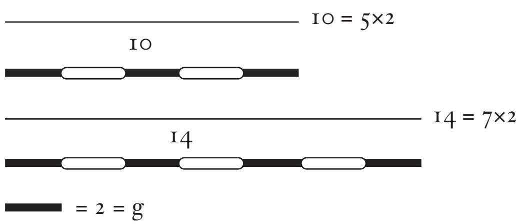
Dit zijn resultaten die op voor de hand liggende wijze zijn te generaliseren tot een willekeurig aantal gehele getallen.

De resultaten van de psèphos-arithmetiek bleken van groot belang in de zeventiende eeuw, toen men de integraalrekening ontwikkelde. In de berekeningen van onder meer Cavalieri (1598-1647) en Wallis (1616-1703) werd de oppervlakte onder de grafiek van $y = x^2$ en $y = x^3$ bepaald door de oppervlakte van smalle stroken op te tellen. Dit leverde sommen als

$$\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^2}+\frac{9}{n^2}+\frac{16}{n^2}+\ldots \text{ en } \frac{1}{n^3}+\frac{8}{n^3}+\frac{27}{n^3}+\frac{64}{n^3}+\ldots$$

waarvan de limiet voor een zeer groot wordende n direct uit de klassieke Griekse resultaten volgde. Dit onderbouwt de stelling dat de Grieken zich nogal eens bezighielden met problemen die later van belang bleken te zijn.

De voorstellingswijze van getallen door configuraties van steentjes weerspiegelt zich in de taal: vierkante getallen, zoals 5×5, 14×14; rechthoekige getallen zoals 5×7, 9×13 et cetera en balkengetallen (δοκιδες), zoals 3×3×100. Illustratief is de term rechtlijnig getal (ευθυγραμμικος) voor een priemgetal: daarmee kan men immers geen vierkant of rechthoek leggen! Treffend is ook het woord ‘zijde’ (πλευρα = pleura) van een kwadraat (vierkant), waar wij, minder beeldend, het woord ‘wortel’ gebruiken. Zo is 5 de zijde van 25. Op de uitgebreide mystiek die de Pythagoreeërs aan getallen verbonden, zullen we hier niet ingaan.



Figuur 2.4: 10 en 14 hebben 2 als gemene maat.

2.4 ‘VERHOUDING’ OPNIEUW BEZIEN: EUDOXUS

Uit het voorgaande zal duidelijk zijn dat het een grote schok was, toen men ontdekte dat niet alles beschreven kan worden door natuurlijke getallen of verhoudingen daarvan. Voor een goed besef hiervan eerst iets over het begrip verhouding: hoe wordt dit gedefinieerd? Iedereen zal het er mee eens zijn dat de verhouding van 14 tot 10 gelijk is aan die van 21 tot 15, kort genoteerd 14:10 = 21:15. Er is namelijk een natuurlijk getal, in dit geval 2, dat zevenmaal deelbaar is op 14 en vijfmaal op 10, immers 14 = 7×2 en 10 = 5×2 (zie ook figuur 2.4), terwijl er ook een natuurlijk getal is, in dit geval 3, dat eveneens zevenmaal deelbaar is op 21 en vijfmaal op 15. We zeggen dan dat 14 en 10 het getal 2 als gemene deler (gemene maat) hebben en dat 3 de gemene deler is van 21 en 15. In beide gevallen gaat het om de grootste gemene deler. Men kende een algoritme om de grootste gemene deler van twee natuurlijke getallen te bepalen, waarmee tevens de existentie van de grootste gemene deler was aangetoond. Deze algoritme – die beschreven staat in de *Elementen* van Euclides – werd later de 'euclidische algoritme' genoemd.

Opmerkelijk is dat de Grieken niet het begrip 'verhouding' definieerden, maar wel uitlegden wat zij verstonden onder de 'gelijkheid' van twee verhoudingen, welke gelijkheid zij 'evenredigheid' noemden. Hun formulering luidde als volgt:

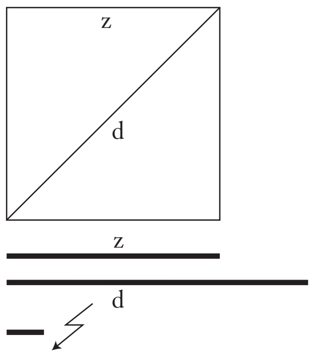
> Getallen zijn evenredig, wanneer het eerste van het tweede en het derde van het vierde even vaak veelvoud is, of hetzelfde deel, of hetzelfde aantal delen.

Men ziet gemakkelijk in dat volgens deze definitie (maar in onze notatie overgebracht) geldt:

12:4 = 48:16 4:12 = 16:48 24:45 = 16:30

In het eerste geval is 12 het drievoud van 4 en 48 het drievoud van 16; in het tweede geval is 4 het derde deel van 12 en 16 het derde deel van 48. In het laatste geval is 24 gelijk aan 8 delen 3 en 45 gelijk aan 15 delen 3, terwijl 16 gelijk is aan 8 delen 2 en 30 gelijk is aan 15 delen 2. Het is duidelijk dat het laatste geval de voorgaande gevallen insluit.

De verbazing was zeer groot toen men in de eerste generatie na Pythagoras ontdekte dat de zijde en de diagonaal van een vierkant geen gemene maat hebben, evenmin als de zijde en de diagonaal van een regelmatige vijfhoek (zie figuur 2.5). De stelling dat 'alles een getal heeft' bleek onjuist en dat gaf een grote schok die leidde tot een tweedeling in de wiskunde: enerzijds was er arithmetica, de studie van de natuurlijke getallen en hun verhoudingen, anderzijds de studie van zogenaamde grootheden als lijnstukken, oppervlakken en lichamen. In een aantal historische etappen zijn deze twee weer verenigd. In de Oudheid reeds werden de begrippen ‘verhouding’ en ‘evenredigheid’ op de helling gezet. In de zeventiende eeuw maakte Descartes het mogelijk door de invoering van een lijnstuk dat in berekeningen als lengte-eenheid functioneerde, om meetkundige configuraties algebraïsch te beschrijven, en omgekeerd. En in de negentiende eeuw werd de veroorzaker van het probleem, de irrationale verhoudingen, klein gekregen door de invoering van de reële getallen $\mathbb{R}$, die spoorde met de opvattingen over de natuurlijke getallen $\mathbb{N}$.



Figuur 2.5: De verhouding van de diagonaal (*d*) en de zijde (*z*) van een vierkant is irrationaal: er is geen gemene maat die zowel op *d* als op *z* een geheel aantal keren af te passen is.

Aan de begrippen grootheid, verhouding en evenredigheden van grootheden is het vijfde boek van de *Elementen* van Euclides gewijd. Deze begrippen worden toegeschreven aan Eudoxus van Knidos (circa 400-347), een leerling van Plato en wel een van de zeer belangrijke wiskundigen uit de Oudheid. Een definitie van grootheid wordt niet gegeven en de ‘definitie’ van verhouding van grootheden is daardoor eveneens moeilijk te doorgronden:

> Verhouding is een zekere betrekking tussen twee gelijksoortige grootheden.

Direct daarop volgt:

> Men zegt dat grootheden een verhouding tot elkaar hebben, indien zij, na vermenigvuldiging elkaar kunnen overtreffen.

Hierbij wordt met ‘vermenigvuldiging’ bedoeld: vermenigvuldiging met een natuurlijk getal, hetgeen ook op te vatten is uit het herhaald samennemen van de grootheid; 3 × 4 is een korte schrijfwijze voor 4 + 4 + 4. Met andere grootheden zoals lijnstukken kan men iets soortgelijks doen, namelijk een lijnstuk tekenen en links en rechts ervan nogmaals hetzelfde lijnstuk afpassen.

Gelijksoortige grootheden zijn volgens deze definitie blijkbaar onderworpen aan het beroemde axioma van Eudoxus-Archimedes, dat erop neerkomt dat bij gegeven gelijksoortige grootheden A en B er altijd natuurlijke getallen m en n bestaan zodanig dat $mA \geq B$ of $nB \geq A$. Dit sluit allereerst in dat er geen lijnstukken bestaan die langer zijn dan alle andere lijnstukken, terwijl men uit dit axioma ook kan afleiden dat men bij gegeven gelijksoortige grootheden A en B door voortgezette halvering van A, een grootheid kan verkrijgen die kleiner is dan B. Dit houdt onder andere in dat er geen lijnstukken bestaan die kleiner zijn dan alle andere. Vanzelfsprekend acht men lijnstukken onderling gelijksoortig. Zo zijn ook oppervlakken onderling gelijksoortig, evenals inhouden. Slechts gelijksoortige grootheden zijn vergelijkbaar.

2.5 EEN LAATSTE WOORD: DEDEKIND

Het zal duidelijk zijn dat de gegeven definitie van evenredigheid van getallen niet onbeperkt overdraagbaar is op lijnstukken, daar deze gebaseerd is op het bestaan van een gemene maat, die lijnstukken – zoals in de generatie na Pythagoras bewezen was – niet altijd hebben. De verhouding van de diagonaal van een vierkant en de zijde van datzelfde vierkant (voor ons met gebruikmaking van $\mathbb{R}$, de rijkere verzameling van de reële getallen, kortweg te schrijven als $\sqrt{2} : 1$) was niet te bepalen of bestond zelfs niet, omdat er geen gemene maat was, geen lijnstuk dat een geheel aantal keren op de diagonaal afgepast kon worden en een ander, geheel aantal keren op de zijde.

Eudoxus wist – voortbouwend op een eigenschap van de evenredigheid van getallen – op geniale wijze een bruikbare definitie van evenredigheid van grootheden te construeren, met omzeiling van het begrip gemene maat! Eerst maar de definitie van Eudoxus (schrik niet):

> Grootheden worden gezegd dezelfde verhouding te hebben, de eerste tot de

tweede en de derde tot de vierde, wanneer willekeurige gelijke veelvouden van de eerste en de derde tegelijkertijd groter zijn dan, gelijk zijn aan, of kleiner zijn dan willekeurige, gelijke veelvouden van de tweede en de vierde, in dezelfde volgorde genomen.

Kader 2.3: Eudoxus' definitie van evenredigheid van grootheden toegelicht.

We lichten deze definitie toe in onderstaande notatie. Laten A, B, C, D vier gelijksoortige grootheden zijn (denk maar aan lijnstukken), dan vormen deze een evenredigheid volgens de definitie van Eudoxus (wij zouden noteren $A : B = C : D$) dan en slechts dan, indien voor willekeurige natuurlijke getallen m en n het volgende geldt:

Indien $mA > nB$, dan geldt ook $mC > nD$ (en omgekeerd)
Indien $mA = nB$, dan geldt ook $mC = nD$ (en omgekeerd)
Indien $mA < nB$, dan geldt ook $mC < nD$ (en omgekeerd)

Deze definitie lijkt uit de lucht te vallen, maar had zich laten inspireren door een karakteristieke eigenschap van evenredige natuurlijke getallen en wel de volgende. We zagen al dat evenredigheid van natuurlijke getallen A,B,C,D betekent dat er natuurlijke getallen a, b, c, d bestaan, zodanig dat

$$A = ag;\ B = bg \qquad en \qquad C = ah;\ D = bh$$

Hier is g de gemene maat van A en B, terwijl h de gemene maat is van C en D, en even vaak als g af te passen is op respectievelijk A en B, is h af te passen op respectievelijk C en D.

Hieruit volgt:

$$mA = nB \quad \leftrightarrow \quad mag = nbg \quad \leftrightarrow \quad mah = nbh \quad \leftrightarrow \quad mC = nD$$

Analoog bewijst men

$$mA > nB \quad \leftrightarrow \quad mC > nD \quad \text{en} \quad mA < nB \quad \leftrightarrow \quad mC < nD$$

De toelichting bij de definitie van Eudoxus (kader 2.3) maakt duidelijk dat die wel is geïnspireerd door een eigenschap van evenredige natuurlijke getallen, maar onafhankelijk van het begrip gemene deler.

Hiermee kon Eudoxus alle bekende eigenschappen van evenredigheden bewijzen; bijvoorbeeld de eigenschap

$$a : b = c : d \quad \leftrightarrow \quad (a - c) : (b - c) = a : b$$

die hij, bij gebrek aan symbolen, als volgt verbaal formuleerde: 'Indien het geheel staat tot het geheel zoals een afgenomen stuk tot een afgenomen stuk, dan zal de rest staan tot de rest zoals het geheel tot het geheel.' Het probleem van de *definitie* van verhouding van grootheden bleef echter bestaan.

De oplossing kwam eerst ruim 2300 jaren later van Richard Dedekind (1831-1916), die met zijn theorie van de 'Schnitte' (sneden) het lichaam van de rationale getallen uitbreidde met irrationale getallen zoals $\sqrt{2}$. We zullen er hier niet verder op ingaan; voor ons doel is hier slechts belangrijk de uitspraak van Dedekind (Dedekind 1969), waar hij zegt, sprekende over de irrationale getallen:

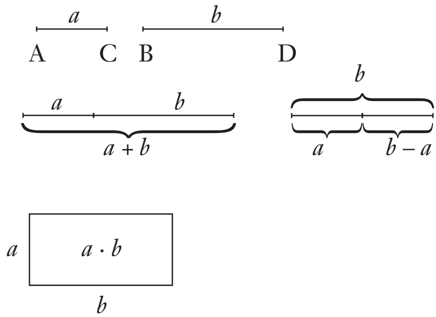
> ...So ist diese Art ihrer Bestimmtheit schon auf das deutlichste in der berühmten Definition ausgesprochen, welche Euklid (Elemente V.5) für die Gleichheit der Verhältnisse aufstellt. Eben diese uralte Überzeugung ist nun gewiss die Quelle meiner Theorie.

Dit is wel een zeer indringende hommage aan de bijdrage van de Grieken aan de ontwikkeling van de wiskunde.

2.6 MEETKUNDE EN ALGEBRA

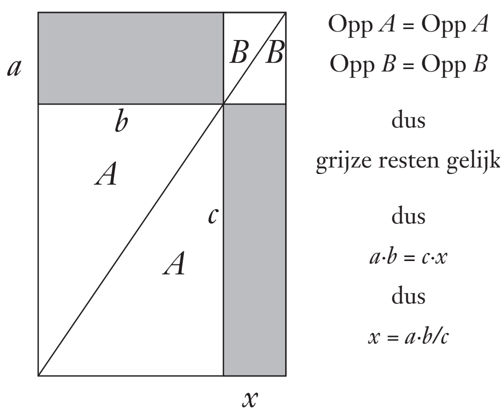
De ontdekking van irrationale grootheden gaf aanleiding tot het rekenen met deze grootheden: de zogenaamde meetkundige algebra of oppervlakterekening. Hiermee kan de wiskundige problemen omtrent lijnstukken oplossen zonder gebruik te hoeven maken van hun lengte. Lengte is een getal, en daarmee kon men niet langer probleemloos werken. Het lijnstuk is een meetkundig object, en hoewel ook daar problematische aspecten in herkend hadden kunnen worden, bleven meetkundige constructies met lijnstukken ook na de ontdekking van irrationale grootheden volkomen geaccepteerd.

De meetkundige algebra begint met definities van de gebruikelijke algebraïsche bewerkingen. De definitie van som en verschil van lijnstukken ligt voor de hand (zie figuur 2.6); het product van twee lijnstukken wordt gedefinieerd als de door die lijnstukken ingesloten

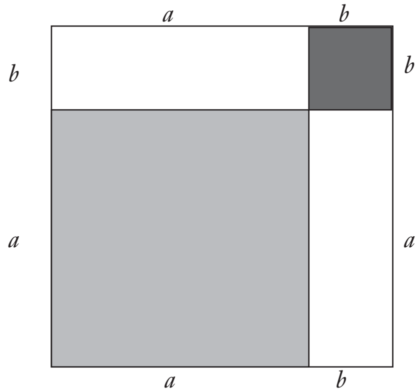


Figuur 2.6: Som, verschil en product van twee lijnstukken.

rechthoek. Het product zelf is dus geen lijnstuk. Over het quotiënt $\frac{ab}{c}$, waarbij a, b en c gegeven lijnstukken zijn, valt meer te zeggen. Indien we stellen $\frac{ab}{c} = x$, dan geldt $ab = cx$. Nu stelt ab de rechthoek met zijden a en b voor. We moeten dus een lijnstuk x vinden zodanig dat de rechthoek met zijden c en x dezelfde oppervlakte heeft als de rechthoek met zijden a en b. In figuur 2.7 is deze constructie uitgevoerd. Beschouwing van het diagram, met name van de symmetrie ten opzichte van de diagonaal, zal uitwijzen dat de grijze rechthoeken gelijke oppervlakten hebben, en dat houdt in dat $ab = cx$.



Figuur 2.7: Constructie van $x = \frac{ab}{c}$



$$(a + b) \cdot (a + b) = a{\cdot}a + 2a{\cdot}b + b{\cdot}b$$

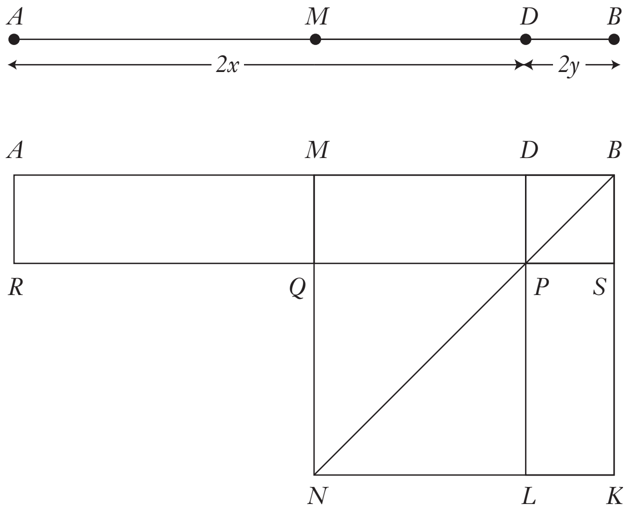
Figuur 2.8: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Met dergelijke technieken kan men zeer aanschouwelijk de bekende formules uit onze schoolalgebra (althans, de formules die een deel van de oudere generatie zich herinnert als ‘merkwaardige producten’) bewijzen. Een eenvoudig voorbeeld staat in figuur 2.8, die de volgende formule bewijst:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Omdat de stellingen in woorden geformuleerd werden en niet, zoals wij doen, genoteerd werden met behulp van symbolen (zoals +, -, haakjes en letters als namen van lijnstukken), waren ze minder doorzichtig. We hebben daarvan een voorbeeld (zie figuur 2.9), stelling 5 uit boek II van de *Elementen* of kortweg: *Elementen* II, 5.

> Wanneer een lijnstuk verdeeld wordt in gelijke en ongelijke delen, dan is de rechthoek die omsloten wordt door de ongelijke delen van het geheel, tezamen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten, gelijk aan het vierkant op het halve lijnstuk.



Figuur 2.9: *Elementen* II, 5.

Kader 2.4: Toelichting bij *Elementen* II, 5.

Laat in figuur 2.9 AB het bedoelde lijnstuk zijn, dat door M verdeeld wordt in twee gelijke delen *AM en MB*. Laat D het lijnstuk verdelen in de ongelijke delen AD en DB. *Elementen* II, 5 zegt dan

$$AD \cdot DB + MD^2 = AM^2$$

Dit wordt eerst doorzichtig als we stellen $AD = 2x$ en $DB = 2y$. Er geldt dan $AB = 2x + 2y$, dus $AM = MB = (x+ y)$ en $MD = MB - DB = (x+ y) - 2y = x - y$, zodat de stelling in algebraïsche vorm zegt:

$$4xy + (x - y)^2 = (x + y)^2$$

Op deze manier konden de Grieken dit echter niet bewijzen bij gebrek aan de daarvoor vereiste notatie, die eerst in de tweede helft van de zeventiende eeuw ingang vond. De Grieken werkten, zoals gezegd, met wat later oppervlakterekening genoemd werd. In het voorbeeld dat we thans beschouwen, *Elementen* II, 5, verloopt het Griekse bewijs als volgt (zie nogmaals figuur 2.9).

De punten A, B, M en D zijn reeds bekend. Loodrecht op AB staan AR, MQ, DP en BS. Ze zijn even lang, zeggen we tegenwoordig. In de Griekse opvatting zijn ze gelijk aan elkaar; ze kunnen elkaar over en weer geheel bedekken. Verder is *S* zo gekozen dat ook *DB* en *BS* gelijk zijn. Een van de consequenties is dat *DBSP* een vierkant is. Vervolgens is de figuur uitgebreid door de lijnstukken *MQ*, *DP* en *BS* te verlengen met stukken die elk gelijk zijn aan *QP*. Uit deze constructie volgt dan dat niet alleen *DBSP* een vierkant is, maar ook *QPLN* en *MBKN*. Er geldt dus: 'de rechthoek op de ongelijke delen van *AB*' (*ADPR*) 'tezamen met het vierkant op het stuk tussen de deelpunten' (*QPLN*) geeft (*AMQR* + *MDPQ*) + *QPLN*. Nu is *AMQR* = *MBSQ* en *MDPQ* = *PSKL*, zodat *AMQR* + *MDPQ* + *QPLN* = *MBSQ* + *PSKL* + *QPLN* en deze laatste drie vormen 'het vierkant op het halve lijnstuk'.

Het geschuif met oppervlakken uit de oppervlakterekening komt ons tegenwoordig omslachtig voor, gewend als we zijn aan algebraïsche notaties. Maar dat deze methode zeer lang in gebruik bleef, blijkt wel uit het werk van de staatsman en wiskundige Johan de Witt (1625-1672). Hij paste deze methode in 1649 nog toe in zijn studie over kegelsneden *Elementa Curvarum Linearum* (De Witt, 1977, 2003). Ook Isaac Newton schoeide zijn wiskundige beschrijving van de natuurkunde (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, 1687) op deze Griekse leest, hoewel hij zelf op dat moment al vele algebraïsche stappen verder was. De algebraïsche achtergronden van de *Principia* toonde Newton zijn publiek pas veel later.

Met behulp van de zojuist bewezen stelling *Elementen* II, 5 en het 'tweelingzusje' *Elementen* II, 6 (betreffende een lijnstuk dat gehalveerd en vervolgens verlengd wordt) kan men een aantal elementaire algebraformules direct afleiden. Zo kan men, bij gegeven lijnstukken a en b, met passer en liniaal twee lijnstukken x en y construeren waarvan de som a en het product b^2 gegeven zijn; x en y worden dus met oppervlakterekening opgelost uit het stelsel:

$$x + y = a$$
$$xy = b^2$$

Door voor de y in de tweede vergelijking in te vullen wat y volgens de eerste vergelijking is, namelijk $a - x$, vindt men de vierkantsvergelijking $x(a - x) = b^2$, ofwel na herschikking van de termen $x^2 - ax + b^2 = 0$. Op vergelijkbare wijze kan men ook de vierkantsvergelijkingen $x^2 + ax + b^2 = 0$ en $x^2 + \mathrm{ax} = b^2$ oplossen. De oplossingen kunnen natuurlijk alleen gevonden worden als ze bestaan. Zo heeft het onderstaande stelsel slechts oplossingen als $a \geq 2b$:

$$x + y = a$$
$$xy = b^2$$

Deze voorwaarde geldt vanzelf ook voor de vergelijking $x^2 - ax + b^2 = 0$, die we uit het stelsel afgeleid hebben. Soortgelijke voorwaarden bepalen de oplosbaarheid van de andere twee vergelijkingen.

Euclides paste zijn meetkundige algebra onder meer toe om twee lijnstukken te construeren die als verhouding de gulden snede hebben. In dit geval luidt de definitie van 'gulden snede', dat de verhouding van het kleinste lijnstuk tot het grootste gelijk is aan de verhouding van het grootste tot de som van de twee lijnstukken. Als het kleinste lijnstuk a gegeven is en het grootste b wordt gezocht, dan voldoen a en b dus aan de evenredigheid:

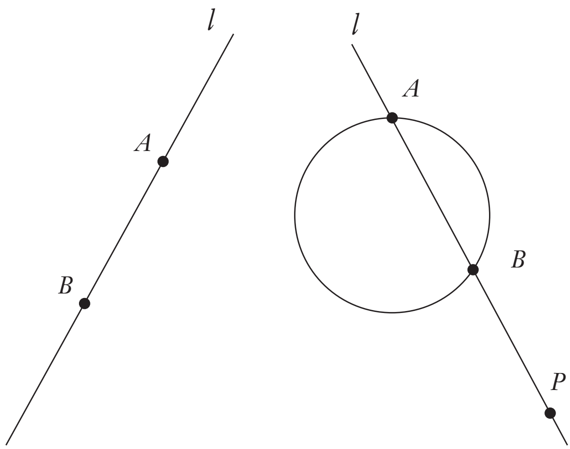
$$a : b = b : (a + b), \text{ ofwel } b^2 = ab + a^2$$

Hierin wordt b gezocht; deze speelt dus dezelfde rol als x in de eerdere vergelijkingen. Euclides gaf in *Elementen* II, 11 een constructie van b; hij kon dus de gulden snede construeren, of – zoals dit probleem ook wel genoemd wordt – een lijnstuk verdelen in middelste en uiterste reden. Boek II van de *Elementen* is geheel gewijd aan deze meetkundige algebra. De beperking tot constructies met uitsluitend een passer en liniaal betekende wel een beperking van het toepassingsgebied: men kon slechts die problemen oplossen waarvan een algebraïsche behandeling leidt tot een tweedegraads vergelijking (dat is een vergelijking waarvan de onbekende, zeg x, in de tweede macht voorkomt, of in lagere machten, maar niet in hogere machten).

De Griekse oudheid kende drie befaamde meetkundige problemen die buiten het gebied van de tweedegraads vergelijkingen vielen, namelijk de driedeling van de hoek, de verdubbeling van de kubus en de spreekwoordelijke breinbreker, de kwadratuur van de cirkel. Het eerste tweetal problemen zou bij een algebraïsche behandeling leiden tot een derdegraads vergelijking; de oplossing daarvan wordt in de volgende paragraaf besproken. De cirkelkwadratuur is van een geheel andere orde. De oplossing daarvan is niet mogelijk door middel van een algebraïsche vergelijking. Hippias van Elis (circa 400 v. Chr.) loste het probleem grafisch op, met behulp van een speciaal op het probleem toegesneden kromme: de kwadratrix, die evenwel in de Griekse oudheid reeds omstreden was, omdat hij afweek van de euclidische constructievoorschriften.

2.7 WEL EN NIET MET PASSER EN LINIAAL

Door het grote gezag van de *Elementen* van Euclides, die slechts een passer en liniaal als hulpmiddelen toeliet en dan ook nog alleen op een zeer precieze manier, bleven initiatieven voor oplossingen met andersoortige constructies uit de Griekse oudheid vrijwel onbekend. We beschouwen hier één van deze afwijkende methoden, de zogenaamde neusis-constructie, die weliswaar berust op het gebruik van een liniaal, maar niet op de precieze wijze die Euclides voorschreef.



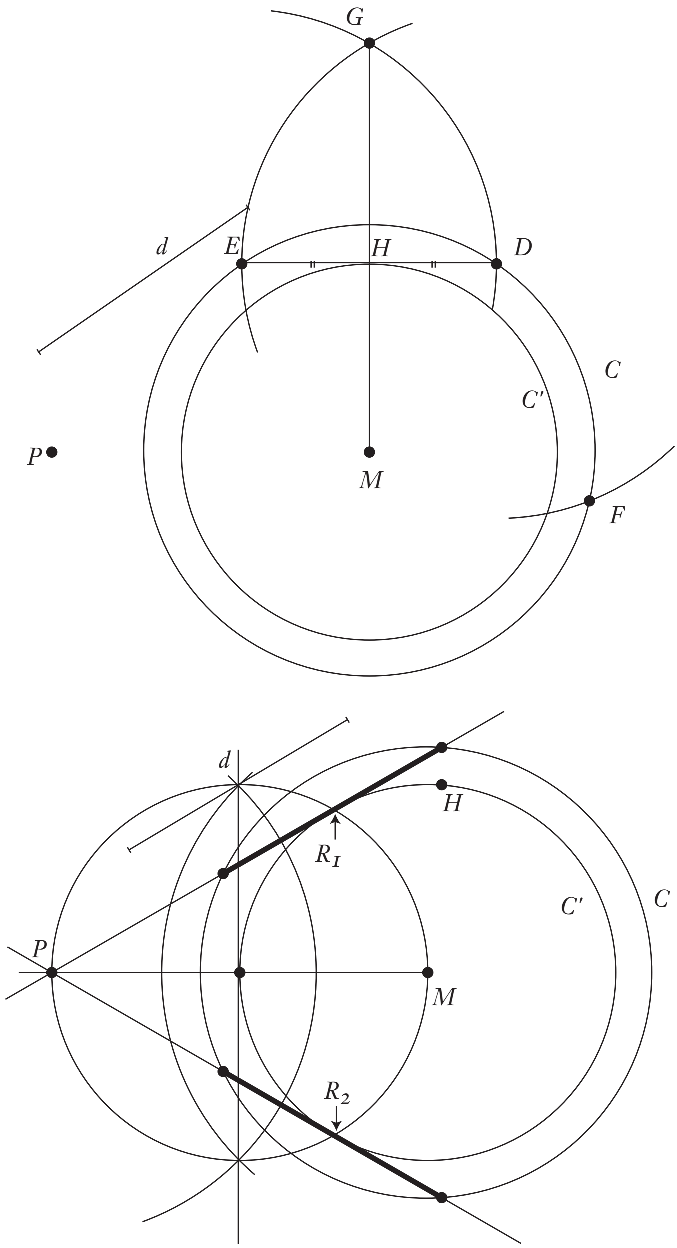
Figuur 2.10: Te construeren een lijn door *P* waarvan cirkel *C* een stuk ter lengte *d* afsnijdt. Oplossing via de neusis-constructie.

Stel dat gevraagd wordt (zie figuur 2.10) om door een gegeven punt *P* een lijn te construeren die van een gegeven cirkel *C* een koorde *AB* afsnijdt met een gegeven lengte *d*. Een eerste idee zou kunnen zijn om op een liniaal twee punten *A* en *B* te markeren die een afstand *d* van elkaar liggen. Men zou deze 'geprepareerde' liniaal langs het punt *P* kunnen leggen en net zo lang kunnen schuiven en draaien totdat *A* en *B* op de cirkel liggen. We kunnen de volgorde ook zo kiezen dat we er eerst voor zorgen dat *A* en *B* op de cirkel liggen en dan de liniaal zo langs de cirkel draaien – daarbij *A* en *B* op de cirkel houdend – dat deze door *P* gaat. De Griekse naam van de constructie (neusis = buiging, neiging) drukt deze procedure uit: de liniaal richt zich naar *P*. Aanschouwelijk is wel duidelijk dat deze werkwijze succes zal hebben. Bij Euclides vond deze constructie echter geen genade, want de liniaal wordt op oneigenlijke wijze gebruikt. Euclides laat in zijn constructievoorschriften ('postulaten') het gebruik van de liniaal alleen toe voor het tekenen van een lijnstuk tussen twee gegeven punten (Postulaat 1) of om een reeds aanwezig lijnstuk aan een van de eindpunten te verlengen (Postulaat 2). De liniaal door *P* laten gaan en tegelijk een eis opleggen aan de koorde *AB* voldoet niet aan de postulaten.

Kader 2.5: Figuur 2.10 geconstrueerd met passer en liniaal.

Overigens blijkt het probleem langs andere weg wel degelijk met passer en liniaal oplosbaar te zijn. Dat gaat als volgt (zie figuur 2.11). Laat *M* het middelpunt van cirkel *C* zijn. Teken in *C* een willekeurige koorde met lengte *d* (dat doe je door een punt *D* op *C* te nemen en met *D* als middelpunt een cirkel met straal *d* te tekenen en deze in *E* en *F* te snijden met cirkel *C*; dat dit mag, zegt Postulaat 3). Laat *DE* deze koorde zijn. Vervolgens laat je uit het middelpunt van *C* een loodlijn neer op *DE* (dit vraagt twee cirkels met middelpunten *D* en *E* en straal bijvoorbeeld gelijk aan *d*; deze snijden elkaar in *G* en *MG* is de gevraagde loodlijn, die *DE* snijdt in *H*). Teken nu cirkel *C'*, met middelpunt *M* en straal *MH*. Als we nu in staat zijn om door *P* een raaklijn aan *C'* te construeren zijn we klaar, want alle raaklijnen aan *C'* snijden van cirkel *C* een koorde met lengte *d* af. De constructie van een raaklijn door een gegeven punt *P* aan een gegeven cirkel *C* is een gebruikelijke euclidische constructie, *Elementen* III, 17. We voeren deze in figuur 2.11 uit zonder de stappen in detail te verantwoorden. De raakpunten R_1 en R_2 zijn de snijpunten van de cirkel met middellijn *PM* en de cirkel *C'*, en het deel van de raaklijnen PR_1 en PR_2 dat binnen de cirkel *C* ligt, verdikt getekend in figuur 2.11, is precies gelijk aan de gegeven koorde *d*.

De constructie met passer en liniaal in figuur 2.11 lijkt gecompliceerder dan de neusis-constructie, maar de Griekse opvatting daarover, zoals in de derde eeuw na Christus is verwoord door Pappus, was anders. De mate van gecompliceerdheid van een oplossing werd voor Pappus bepaald door de gebruikte hulpmiddelen. Als een constructie



Figuur 2.11: Hetzelfde probleem als in 2.10, maar nu geconstrueerd met passer en liniaal.

mogelijk was door middel van rechte lijnen en cirkels, dan diende men die niet met ingewikkelder krommen uit te voeren. Lukte het niet met rechte lijnen en cirkels, dan was de volgende stap om in de constructie als extra hulpmiddelen kegelsneden (parabolen, ellipsen en hyperbolen) toe te laten. Als het met deze toevoeging nog niet lukte, kon men overgaan tot nog ingewikkelder krommen. Gebruikte men een dergelijke kromme voor een probleem uit de eerste categorie, dan schoot men als het ware met een kanon op een mug. De ethiek prefereerde dus een lange constructie met passer en liniaal boven een korte neusis-constructie.

Een van de fameuze constructieproblemen uit de Griekse oudheid is de driedeling van de hoek, dat wil zeggen het in drie gelijke hoeken verdelen van een gegeven hoek. Op allerlei manieren is dit probleem ingebed in de Griekse gedachtegang. In de eerste plaats is de tweedeling van de hoek een van de meest elementaire euclidische constructies. Daarnaast maakt de driedeling van de hoek een rij van andere constructies mogelijk, die weerstand boden aan de voorschriften van Euclides (de regelmatige zevenhoek en negenhoek bijvoorbeeld). En ten slotte werd er in de astronomie gewerkt met tabellen waarin bij een gegeven hoek *EMD* (vergelijk figuur 2.11) de lengte *d* van koorde *ED* vermeld stond. Om deze tabel in stappen van 1/90ste deel van een rechte hoek (wij zouden zeggen stappen van 1 graad) te kunnen berekenen, was ergens in de berekening de driedeling van een hoek nodig.

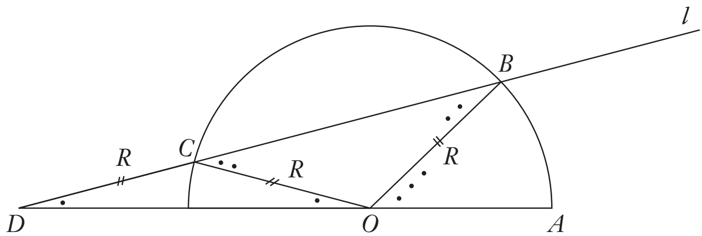
Omdat de driedeling niet direct volgens de euclidische postulaten opgelost kon worden, zochten de Grieken naar alternatieven. Een van hen was Archimedes (287-212), die scherp theoretisch inzicht combineerde met de slimheid van een ingenieur. Archimedes ontwierp een constructie met een neigende liniaal. Laat in figuur 2.12 gevraagd worden om hoek *AOB* in drie gelijke delen te verdelen. Construeer dan eerst een halve cirkel met straal R ($=OA$). Markeer vervolgens op een liniaal l de punten C en D met $CD = R$. Dan komt het neusis-deel van de constructie: manipuleer met l zodanig dat deze gaat door B, terwijl C op de halve cirkel ligt en D op het verlengde van het been AO van de gegeven hoek.

Men ziet dan eenvoudig in (want $CD = CO = R$ en een gelijkbenige driehoek heeft gelijke basishoeken):

$\angle ODC = \angle DOC$

$\angle OCB = 2\angle ODC$, want

$\angle OCB = 180° - \angle OCD = 180° - (180° - \angle ODC - \angle DOC) = 2\angle ODC$, dit laatste omdat de hoeken ODC en DOC gelijk zijn. Wegens de gelijkbenigheid van driehoek BOC zijn ook daarin de basishoeken gelijk, zodat $\angle OBC = \angle OCB = 2\angle ODC$ en verder is $\angle AOB = \angle ODB + \angle OBD$ (zoals in de derde stap), en door combinatie met de vorige stap vindt men $\angle AOB = \angle ODB + \angle OBD = \angle ODC + \angle OBC = 3\angle ODC$. Hiermee is bewezen dat $\angle ODC$ het derde deel is van de gegeven hoek AOB.



Figuur 2.12: Archimedes' oplossing van de driedeling met behulp van een neusis-constructie.

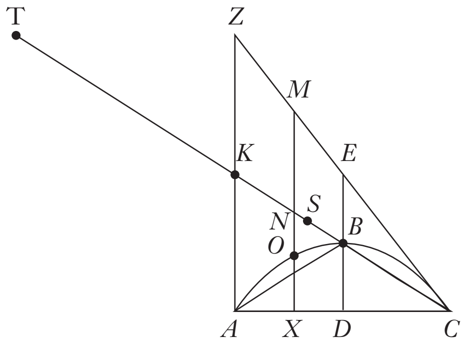
In de zeventiende eeuw introduceerde Descartes de techniek om meetkundige problemen met behulp van algebra te onderzoeken. Het probleem van de driedeling komt, vertaald als algebraïsch probleem, neer op het oplossen van een bepaalde derdegraads vergelijking. In 1837 toonde de Franse wiskundige Pierre Louis Wantzel (1814-1848) aan dat deze vergelijking 'irreducibel' is, hetgeen inhoudt dat de oplossingen niet met passer en liniaal geconstrueerd kunnen worden. Het probleem van de driedeling van de hoek was na ruim tweeduizend jaar opgelost, en de uitkomst verbaast niet: het is niet vreemd dat de Grieken de driedeling niet volgens de euclidische voorschriften konden construeren, want zo'n constructie is principieel onmogelijk. Een bespreking van deze problematiek vindt men in *Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde* van Grootendorst.

De situatie rond het probleem van de verdubbeling van de kubus (gegeven een kubus; start met de ribbe van de gegeven kubus en construeer daarmee een kubus met dubbele inhoud) is vergelijkbaar. Ook in dit geval liet de oplossing met passer en liniaal op zich wachten en er werden alternatieve constructiemiddelen bedacht. Er bestond een neusis-constructie, verder wordt aan Plato een oplossing toegeschreven met behulp van een aantal schuivende winkelhaken, en Menaechmus (circa 350 v. Chr) gaf een oplossing door andere grafieken (krommen) met elkaar te snijden dan de toegestane cirkels en lijnen, namelijk twee parabolen. Ook in dit geval leidt de algebraïsche vertaling tot een derdegraads vergelijking, die trouwens voor de hand ligt: als de ribbe van de oorspronkelijke kubus lengte a heeft en de gezochte ribbe heeft lengte x, dan zijn de inhouden van deze kubussen respectievelijk a^3 en x^3 en de tweede inhoud moet het dubbele zijn van de eerste, dus de vergelijking luidt $x^3 = 2a^3$. Ook deze vergelijking, zo bewees men in de negentiende eeuw, heeft geen oplossingen die met passer en liniaal construeerbaar zijn.

Een laatste opmerking over de neusis is dat de techniek nieuwe krommen opleverde, die naast cirkels en rechte lijnen in constructies gebruikt konden worden. Die voldeden dan niet meer aan de eisen van Euclides, maar ze losten wel het probleem op. Onze conclusie is dat passer en liniaal niet alleenzaligmakend zijn. Anderzijds is het wel zo dat de strikte euclidische constructieregels wiskundigen tweeduizend jaar scherp gehouden hebben. De drie fameuze constructieproblemen zijn een inspiratiebron geweest voor talrijke nieuwe vondsten en zelfs hele theorieën. Met passer en liniaal zijn minder constructies mogelijk, maar juist het redeneren daarover heeft de wiskunde gemaakt tot wat zij nu is.

2.8 NATUURKUNDIGE INSPIRATIE: ARCHIMEDES

Een wiskundige die met zijn 'Heureka' tot de verbeelding spreekt, en die niet afgedaan mag worden met enkele regels over de driedeling van de hoek, is Archimedes. Hij wordt algemeen beschouwd als de grootste wiskundige uit de Griekse oudheid. Hij dankt die faam aan de veelzijdigheid van zijn onderwerpen, de diepgang van zijn resultaten, zijn open oog voor de toepassingen en zijn heuristische aanpak van deelproblemen, gevolgd door een exacte fundering. Met betrekking tot zijn veelzijdigheid merken we op dat tot de gebieden waarop hij zich bewoog, niet alleen de zuivere wiskunde behoorde, maar ook de theoretische mechanica (denk aan de hefboomwet, zie figuur 2.13), de toegepaste mechanica inclusief het ontwerpen van werktuigen, en dat wat wij tegenwoordig de numerieke wiskunde noemen. Deze heeft tot doel om grootheden die we niet exact kennen of hoeven te kennen met een gekozen precisie te benaderen. Van dit laatste noem ik slechts Archimedes' benadering van de verhouding $\frac{\text{omtrek}}{\text{middellijn}}$ van een cirkel. Tegenwoordig wordt deze verhouding, als de middellijn 1 is, met π aangeduid; de eerste letter van het Griekse woord voor omtrek περιφερεια (perifereia). Deze notatie werd in 1706 voorgesteld door de Engelsman Jones en vond ingang toen Euler – het grote voorbeeld voor zijn tijdgenoten – haar vanaf 1734 systematisch ging gebruiken. Archimedes bewees dat de verhouding tussen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{10}{70} = 3\frac{1}{7}$ lag.



Figuur 2.13: Archimedes analyseert de kwadratuur van het parabool-segment *ABC* door lijnstukken aan een balans te hangen.

Op vele resultaten, die Archimedes bereikte op het gebied van de zuivere wiskunde, bouwde men in de zeventiende eeuw voort. In het bijzonder vraag ik hier aandacht voor de inhouds- en oppervlakteberekeningen, omdat aan de hand daarvan een uniek aspect van zijn wiskundebeoefening gedemonstreerd kan worden, namelijk zijn heuristische benadering van problemen.

Archimedes liet zich vaak inspireren door de hefboomwet. Hij spreekt dat zelf duidelijk uit in brief *Over de methodenleer*, gericht aan Eratosthenes. Heiberg ontdekte deze brief in 1906 in een handschrift uit de tiende eeuw. Archimedes schreef daar onder meer:

> ...Omdat ik ervan overtuigd ben dat zij [de mechanica] ook even nuttig is voor het bewijzen van stellingen, want ook van een aantal stellingen die ik al eerder inzag door middel van de mechanica, is het meetkundig bewijs geleverd, omdat het mechanisch onderzoek geen bewijs vormt.

en

> ...Ik besloot de beschreven methode te publiceren... omdat ik ervan overtuigd ben dat daaruit een niet gering nut voortkomt voor de wiskunde, want ik vertrouw erop dat vele van de huidige en van de komende generaties, wanneer deze methode bekend is, ook andere stellingen zullen vinden die mij nog niet zijn ingevallen.

Kader 2.6: Berekening van de oppervlakte van een paraboolsegment.

Het paraboolsegment *ABC* (zie figuur 2.13) is afgesneden door de koorde *AC*, die loodrecht staat op de as van de parabool. De parabool heeft top *B*. Verder is *D* het midden van *AC*, en de raaklijn in *C* snijdt het verlengde van *DB* in *E* en de loodlijn in *A* op *AC* in *Z*. Het verlengde van *CB* snijdt *AZ* in *K* en op het verlengde van *CK* ligt *T* zo, dat *TK* = *KC*.

Archimedes kiest nu op lijnstuk *AC* een willekeurig punt *X*. Hij trekt *XM* loodrecht op *AC* (*M* op *CZ*). Onder verwijzing naar een thans verloren geschrift stelt hij vast dat *EB* = *BD*, en de *Elementen* van Euclides aanhalend concludeert hij: *MN* = *NX*, *ZK* = *KA* en *CA* : *AX* = *CK* : *KN*. Verder is uit de meetkundige definitie van de parabool af te leiden *CA* : *AX* = *MX* : *XO*. Door combinatie van deze laatste twee evenredigheden vindt Archimedes *CK* : *KN* = *MX* : *XO* en dus *CK* · *XO* = *KN* · *MX*, echter *TK* = *CK*, dus *TK* · *XO* = *KN* · *MX*.

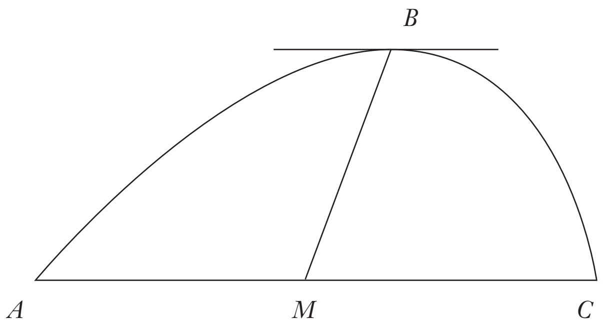
Om deze laatste gelijkheid draait het nu (in de meest letterlijke zin!), want deze wordt door Archimedes geïnterpreteerd met behulp van de hefboomwet, populair gezegd: kracht (XO) maal krachtarm (TK) is last (MX) maal lastarm (KN), vergelijk met figuur 2.13. Archimedes zag blijkbaar *TKC* als een hefboom met draaipunt *K* en de laatste gelijkheid leest hij dan als volgt: indien ik het lijnstuk *XO* 'ophang' in *T* en ik hang het lijnstuk *MX* in *N*, dan houden beide elkaar in evenwicht. Als ik nu *X* het lijnstuk *AC* laat doorlopen en ik tel de 'gewichten' van alle lijnstukken *XO* op, dan hangt in *T* uiteindelijk het gewicht van het paraboolsegment. Dit wordt in evenwicht gehouden door het gewicht van een serie lijnstukken, die allemaal evenwijdig zijn aan MX en die samen driehoek *ACZ* vormen. Dit gewicht concentreert zich in het zwaartepunt *S* van driehoek *ACZ* en ligt, zoals Archimedes in een ander werk (*Evenwichten van vlakke figuren)* had aangetoond, op éénderde van de zwaartelijn *CK*, gerekend vanaf *K*. Dit betekent dat

Opp. segment *AOBC* maal *TK* = Opp. driehoek *AZC* maal *KS*

Nu geldt *TK* = *KC* = 3*KS* en men ziet gemakkelijk in dat de oppervlakte van driehoek AZC viermaal de oppervlakte van driehoek ABC is, zodat het uiteindelijke resultaat wordt

$$\text{Opp. segment } AOCB \text{ maal } TK = \tfrac{4}{3} \text{ Opp. driehoek } ABC$$

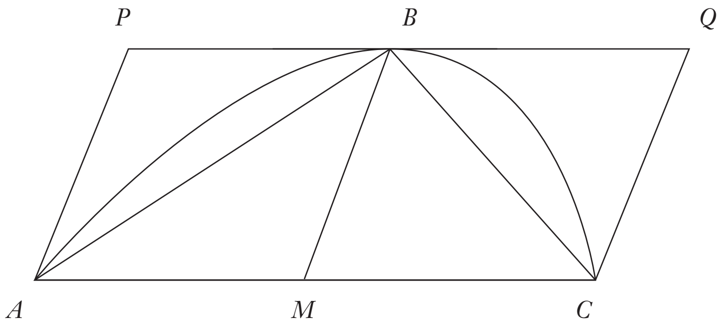
Voor degene die het voorgaande in detail wil narekenen een aanwijzing: kies de x-as en de y-as langs AC respectievelijk AZ. Stelt men daarna $AC = 2a$ en $DB = b$, dan heeft de parabool $a^2y = b(a^2 - x^2)$ als vergelijking en daarna kan men met differentiaal- en integraalrekening verder.



Figuur 2.14: Nogmaals het paraboolsegment; de raaklijn in B is evenwijdig aan AC.

2.9 WISKUNDIGE PRECISIE: ARCHIMEDES

Het resultaat uit kader 2.6 is verre van streng verkregen, en Archimedes zag het dan ook alleen als iets wat hem op een idee bracht. Daarna stelde hij zichzelf nog de taak om het resultaat dat hij via de 'mechanische methode' had verkregen ook meetkundig hard te maken. Hij deed dat door te bewijzen dat de oppervlakte van het paraboolsegment niet groter en ook niet kleiner is dan $\tfrac{4}{3}$ van de oppervlakte van de 'ingeschreven driehoek'. Hiermee wordt bedoeld de driehoek die de koorde van het segment tot basis heeft en als top het raakpunt van die raaklijn aan de parabool die evenwijdig aan de koorde verloopt (zie figuur 2.14). Dit bewijs verloopt via de zogenaamde exhaustiemethode, waarbij het segment wordt opgevuld (zeg maar 'uitgeput') door ingeschreven driehoeken van steeds kleinere paraboolsegmenten. En passant wordt dan bij dit strenge bewijs de basis gelegd voor het sommeren van oneindige rijen. Hiermee legt Archimedes de fundamenten voor de integraalrekening, waarop men in de zeventiende eeuw verder bouwde.

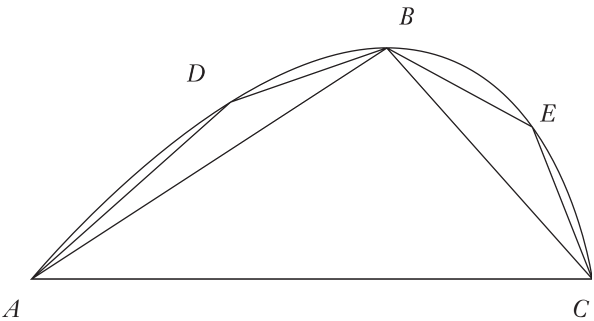


Figuur 2.15: In het segment is driehoek *ABC* met oppervlakte a_0 ingeschreven.

Voor een schets van het exacte bewijs van Archimedes bezien we figuur 2.15. Hierin is *ABC* weer een willekeurig paraboolsegment met koorde *AC*, en de raaklijn in *B* verloopt evenwijdig aan *AC*. Verder is *M* het midden van *AC*, en de lijnen *AP* en *CQ* lopen evenwijdig aan *BM*. Het is uit deze figuur duidelijk dat de oppervlakte van het parallellogram *APQC* meer is dan de oppervlakte van het paraboolsegment *ABC*. De oppervlakte van driehoek *ABC* (de helft van *APQC*) is dus ook meer dan de helft van de oppervlakte van het segment *ABC*. Dit betekent dat, indien we driehoek *ABC* wegnemen, we meer dan de helft van het paraboolsegment wegnemen, en dus minder dan de helft van dit segment 'overlaten'. We noemen de oppervlakten van segment en driehoek respectievelijk S en a_0. Op grond van het weegexperiment uit kader 2.6 vermoedde Archimedes dat $S = \frac{4}{3}a_0$.

Hij zal binnenskamers niet getwijfeld hebben aan dit resultaat, maar deed dit op principiële gronden wèl in het werk dat hij naar buiten bracht. Daar mocht hij geen redenering gebruiken waarin een oppervlak in oneindig veel lijnstukken gesplitst wordt, en ook een oneindige som moest hij vermijden. Zijn vraag was dus: hoe toon ik op een methodisch aanvaardbare wijze aan dat $S = \frac{4}{3}a_0$?

Hij redeneerde: als ik kan aantonen dat S niet groter is dan $\frac{4}{3}a_0$, en ook niet kleiner is dan $\frac{4}{3}a_0$, dan moet wel gelden $S = \frac{4}{3}a_0$. Archimedes kiest als eerste stap in het bewijs de punten *D* en *E* op de paraboolomtrek, zodat de raaklijnen in deze punten evenwijdig verlopen aan *AB*, respectievelijk *BC* (zie figuur 2.16). Het is dan duidelijk dat ook de driehoeken *ADB* en *BEC* tezamen meer dan de helft wegnemen van het deel van S dat ΔABC 'overliet'. Minder doorzichtig is de eigenschap van de parabool dat de som van de oppervlakten van de op *AB* en *BC* aangebrachte driehoeken juist het vierdedeel is van de oppervlakte van ΔABC, van a_0 dus. We noemen deze som a_1; het genoemde bewijs moeten we hier achterwege laten. Dit procédé zetten we voort door op de opstaande zijden van de twee nieuwe driehoeken op dezelfde wijze weer nieuwe driehoeken (nu vier in aantal) aan te brengen. Deze nemen dan ook weer meer dan de helft weg van het restant van *S* en hun totale oppervlakte, a_2, is het vierdedeel van a_1.



Figuur 2.16: Na *ABC* zijn ook de driehoeken *ADB* en *BEC* uit het segment weggenomen.

Zo gaat hij verder. Bij iedere stap wordt een rand van driehoeken toegevoegd, die meer dan de helft van het restant van *S* wegneemt en waarvan de totale oppervlakte het vierdedeel is van de oppervlakte van de vorige rand. Als we de oppervlakte van de *n*-de rand a_{n} ($n \geq 1$) noemen, dan geldt dus $a_{n+1} = \frac{1}{4} a_n$ en daaruit volgt direct dat $a_n = (\frac{1}{4})^n a_0$. Op grond van het axioma van Eudoxus-Archimedes (zie paragraaf 2.4) kan Archimedes de nieuw toe te voegen rand willekeurig klein maken, door *n* maar groot genoeg te kiezen. Een tweede belangrijke conclusie is deze: doordat bij iedere stap meer dan de helft van *S* wordt weggenomen, kan men door maar voldoende stappen te zetten volgens hetzelfde axioma bereiken dat deze rest willekeurig klein wordt. Wiskundig geformuleerd: bij ieder positief getal ε, hoe klein ook, kan men een *n* kiezen zodat de oppervlakte van de rest, dat wil zeggen $S - (a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$, kleiner is dan ε.

De derde belangrijke hulpstelling in Archimedes' bewijs is de volgende eigenschap, waarmee hij een eindige meetkundige reeks sommeert en daarmee de totale oppervlakte van de eerste *n* randen in *n* en a_0 uitdrukt: $(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{1}{3} a_n = \frac{4}{3} a_0$.

Het bewijs van deze hulpstelling laten we hier achterwege. Met behulp van deze laatste hulpstelling sluit Archimedes uit dat S groter is dan $\frac{4}{3}a_0$ en met behulp van de eerste en derde hulpstelling sluit hij uit dat S kleiner is dan $\frac{4}{3}a_0$. Hieruit concludeert hij dat S gelijk is aan $\frac{4}{3}a_0$, daarbij stilzwijgend aannemend dat het paraboolsegment een oppervlakte heeft.

Het bovenstaande is slechts één voorbeeld van de werkwijze van Archimedes. Met een vernuftige, bijvoorbeeld mechanische, heuristiek krijgt hij een vermoeden van het resultaat dat hij zoekt, en met een sluitende meetkundige methode bewijst hij het resultaat, daarbij binnen de geaccepteerde bewijsmethoden van zijn tijd blijvend. Ook voor het bepalen van de inhoud van een bol heeft hij een hefboomconstructie bedacht, waarbij de gegeven bol en een geschikt gekozen kegel aan de ene kant van de hefboom hangen, en in evenwicht gehouden worden, door een geschikt gekozen cilinder die aan de andere kant opgehangen is. Hij vindt dan voor de inhoud van een bol met straal R de waarde $\frac{4}{3}\pi R^3$.

2.10 EPILOOG

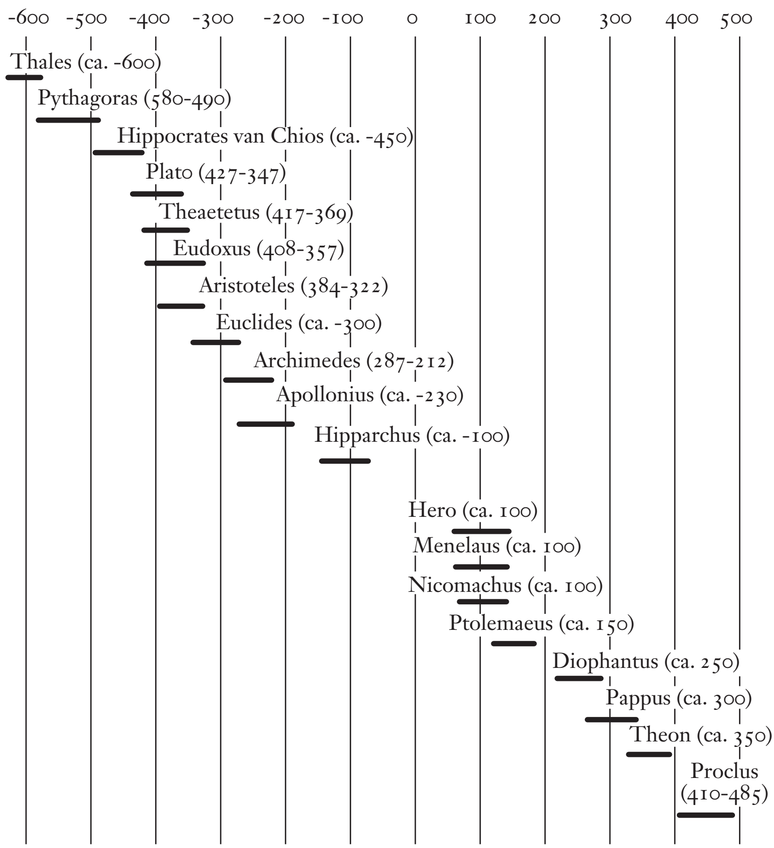
Het schrijven van een epiloog is de opdracht die Albert Grootendorst zichzelf eind november 2003 stelde. 'Epiloog' is tevens het laatste woord dat hij zelf voor dit hoofdstuk schreef.

Het ligt voor de hand welk slot hij voor zich zag: nog iets zeggen over Apollonius (circa 250 v. Chr.) die de theorie van kegelsneden vestigde, waarop De Witt, Kepler en Newton zich baseerden; nog iets zeggen over de wiskundigen uit de nadagen, in elk geval over Diophantus (circa 250 n. Chr.), wiens Arithmetica *Fermat inspireerde tot diens 'Laatste Stelling' die eerst in 1994 bewezen werd.*

Als hij de lijn had gevolgd van voordrachten voor het Nederlands Klassiek Verbond, dan had hij waarschijnlijk de bijdragen en de oorzaken van het verval van de Griekse wiskunde nog samengevat. En zoals vaak, hadden die een sterke onderlinge beïnvloeding. De ontdekking van irrationale verhoudingen was een grote stap voorwaarts, maar een adequate begripsvorming op dit punt kwam er niet. Met het begrip 'oneindig' gebeurde iets soortgelijks. Er was belangstelling voor, er waren intrigerende problemen genoeg, maar de begripsvorming bleef achter, vooral door het strikte dictaat van Euclides.

Rest ons nog één houvast om dit hoofdstuk in de geest van Grootendorst te kunnen afsluiten, en dat is de laatste figuur die hij inleverde, figuur 2.17.

De figuur geeft een chronologisch overzicht van de Griekse bijdragen aan de wiskunde. Hij gebruikte een soortgelijk overzicht eerder (afbeelding 6, p. 22 in Grepen uit de Geschiedenis van de wiskunde*; 1988) om aan te tonen hoe intensief de wiskundige ontwikkeling in de Griekse oudheid was. Die tijdbalk heeft een concentratie van namen tussen 500 v. Chr. en 400 n. Chr., dan zijn er twee Arabische namen tussen 850 en 1050, waarna er een lawine van namen is vanaf midden vijftiende eeuw. Figuur 2.17 is te zien als een nadere detaillering voor de Oudheid, binnen het grote geheel van de wiskunde.*



Figuur 2.17: Chronologisch overzicht van de Griekse wiskunde.

Albert Grootendorst hechtte aan de klassieken, en hij wilde dat ook wij zouden weten dat onze wetenschap schatplichtig is aan de denkers van Attica en Alexandrië. Hij heeft het ons verteld in de taal die Dijksterhuis voor de wetenschapsgeschiedenis heeft gevestigd, een klassiek verhaal in de hoop dat het de komende generaties zal stimuleren om met de wiskunde verder te gaan.

LITERATUUR

Archimedes, *Opera Omnia cum Commentarii Eutocii* edidit I.L. Heiberg, corrigenda adiecit E.S. Stamatis. Stuttgart, Teubner, 1972.

Aristoteles, *Metaphysica*. Loeb Classical Library, London 1977.

Becker, O. *Das Mathematische Denken der Antike*. Göttingen, 1966.

Burton, D.M., *The History of Mathematics.* Boston etc. 1985.

Dedekind, R., 'Stetigkeit und Irrationale Zahlen', in: *Gesammelte Abhandlungen III*, p. 315-334. Chelsea Publishing Company, New York, 1969.

Diels, H. & Kranz, W.W., *Die Fragmente der Vorsokratiker.* Berlin, 1974.

Dijksterhuis, E.J., *De Elementen van Euclides I & II*. Groningen 1930.

Dijksterhuis, E.J., *Archimedes I & II*. Groningen, 1938. Hiervan een Engelse Vertaling door C. Dikshoorn, Kopenhagen 1956.

Euclides, *Euclidis Elementa*, post I.L. Heiberg edidit E.S. Stamatis. Vols. I-V. Leipzig, 1969-1977.

Grootendorst, A.W., *Grepen uit de Geschiedenis van de Wiskunde*. Delft, 1988.

Grootendorst, A.W. en A.J. van Zanten (eds.), *Caleidoscoop van de Wiskunde*. Delft, 1995.

Heath, T.L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, translated from the text of Heiberg, with introduction and commentary by Sir Thomas L. Heath, Vols. I-III. New York, 1956.

Heath, T.L., *The Works of Archimedes*. New York, 1953.

Heath, T.L., *A History of Greek Mathematics*, Vols. I&II. Oxford etc., 1965.

Hultsch, F., *Pappi Aleandrini Collectionis quae supersunt*, Vol I&II. Berlin, 1877.

Katz, V.J., *A History of Mathematics*. New York, 1993.

Kline, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York, 1972.

Monna, A.F., *Analyse non-archimédienne*. Berlin, 1970.

Morrow, G.R., *Proclus; A commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton NY, 1970.

Schneider, I., *Archimedes. Ingenieur, Naturwissenschaftler und Mathematiker*. Darmstadt, 1979.

Stillwell, J., *Mathematics and its History*. New York, 2001.

Thaer, C., *Euklid; die Elemente I-XIII*. Darmstadt, 1962.

Thomas, I., *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*. Cambridge Ma., 1967 (Griekse teksten met Engelse vertaling).

Waerden, B.L. van der, *Ontwakende Wetenschap*. Groningen, 1950.

Waerden, B.L. van der, *Die Pythagoreer*. Zürich & München, 1979.

Witt, Jan de, *Elementa Curvarum Linearum Liber Primmus et Liber Secundus*. Tekst, vertaling en commentaar door A.W. Grootendorst. Amsterdam, 1997, resp 2003.

3
Indiase en Arabische wiskunde

Jan Hogendijk

De Indiase en Arabische wiskunde hebben op het eerste gezicht veel gemeen. Beide vallen in de periode voor de boekdrukkunst. De primaire bronnen zijn handschriften, voor de Arabische traditie op papier, voor de Indiase traditie ook op boombast en palmbladeren. De handschriften zijn meestal geschreven in een heilige taal: bij de Indiase wiskunde het Sanskriet, bij de Arabische wiskunde het Arabisch, de taal van de Koran. Lang niet al deze bronnen zijn onderzocht, zodat het moderne onderzoek zich nog in de kinderschoenen bevindt. Door hun invloed op middeleeuws Europa maken beide tradities deel uit van onze eigen wiskundige wortels.

In middeleeuws India was astrologie een belangrijke toepassing van de wiskunde en dit gold ook in het islamitisch cultuurgebied, hoewel daar ook aan de waarde van de astrologie getwijfeld werd omdat die in tegenspraak kon zijn met de almacht van God. In elk geval kunnen de Indiase en Arabische wiskunde niet los gezien worden van de Indiase en Arabische sterrenkunde, die beide voortbouwen op de Babylonische en Griekse sterrenkunde. Daarom passeren de ontwikkelingen in de sterrenkunde in de Oudheid eerst kort de revue. Daarna worden korte schetsen gegeven van de Indiase en Arabische wiskunde, met van elk één concreet voorbeeld. Wellicht dat de lezer hierdoor ook inzicht krijgt in de essentiële verschillen tussen de beide tradities.

3.1 STERRENKUNDE IN DE OUDHEID

Omstreeks 750 voor Christus begon in het Babylonisch cultuurgebied een nieuwe ontwikkeling in de sterrenkunde. Vanaf die tijd werden systematisch allerlei hemelverschijnselen waargenomen: zons- en maansverduisteringen, eerste zichtbaarheid van de wassende maansikkel, laatste zichtbaarheid van de afnemende maansikkel, eerste en laatste zichtbaarheid van planeten, enzovoort. Deze waarnemingen zijn eeuwenlang voortgezet. De resultaten werden opgeschreven op kleitabletten en in archieven bewaard. Na 500 voor Christus hebben onbekende Babylonische wiskundigen op basis van dit archiefmateriaal rekenmethodes ontwikkeld om hemelverschijnselen te voorspellen. Deze rekenmethodes zijn verbazend nauwkeurig en maken gebruik van het sexagesimale (zestigtallige) talstelsel. In deze methoden zien we een proces van mathematisering van de natuurverschijnselen. Dat wil zeggen dat deze verschijnselen worden weergeven op manieren die niet helemaal exact zijn, maar zich wel goed lenen voor rekenwerk.

Een goed voorbeeld hiervan is de dierenriem. Vanaf het begin hadden de Babyloniërs opvallende groepen sterren aan de sterrenhemel gecombineerd tot sterrenbeelden. In één jaar beschrijft de zon tegen de achtergrond van deze sterrenbeelden een cirkelvormige baan met als middelpunt de aarde. De Babylonische wiskundigen besloten deze cirkelvormige zonnebaan te verdelen in 12 tekens van 30 graden, totaal dus 360 graden. Het getal 360 is waarschijnlijk gekozen omdat dit een veelvoud van 60 is, en dicht in de buurt ligt van het aantal dagen in een zonnejaar. De twaalf tekens kregen de naam van de sterrenbeelden, maar vielen niet precies samen met de groepen sterren aan de hemel. Omdat sommige van deze sterrenbeelden dieren waren, hebben de Grieken de zonnebaan dierenriem genoemd. Later is men ertoe overgegaan ook alle andere cirkels in 360 graden te verdelen.

Uit die periode tussen 350 voor Christus en het jaar 0 zijn vele Babylonische kleitabletten overgebleven met berekeningen en voorspellingen van volle en nieuwe manen, eerste zichtbaarheid van de wassende maan, en planeetstanden. Het werd nu mogelijk om horoscopen te berekenen en zo kon de astrologie zich ontwikkelen. De astrologen gebruikten ook posities van de hemellichamen onder de horizon, die je niet kunt zien maar alleen kunt uitrekenen. De astrologie was de eerste serieuze toepassing van geavanceerde wiskunde.

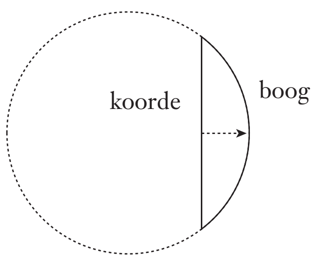
Voor die periode werd wiskunde alleen in zeer eenvoudige vorm toegepast in landmeten, rekenen en kalenderberekeningen. Het doet in dit verhaal uiteraard niet ter zake of wij tegenwoordig in de astrologie geloven.

Omstreeks 350 voor Christus waren de Griekse geleerden ook bezig met sterrenkunde, maar op een meer filosofische manier. Eudoxus van Knidos bedacht een model van het heelal met bollen met als middelpunt de aarde. Deze bollen bewogen op ingewikkelde manieren, maar wel met constante snelheden, ten opzichte van elkaar. Rond 200 voor Christus kwam Apollonius van Perga met een alternatief model. Elke planeet bewoog volgens hem met constante snelheid op een epicykel, dat is een cirkel waarvan het middelpunt met een andere constante snelheid op een andere cirkel om de aarde heen draait. Zo konden de Grieken de onregelmatige bewegingen van de planeten aan de hemel ongeveer verklaren. Echter, Eudoxus, Apollonius en hun tijdgenoten hebben nooit geprobeerd de verhoudingen en snelheden in hun modellen precies in getallen uit te drukken. Daarom kon er met hun modellen niet gerekend worden en dus konden zij niet zoals de Babyloniërs voorspellen waar op een bepaald moment een bepaald hemellichaam aan de hemel zou staan. Er kon dus nooit gecontroleerd worden of de modellen echt klopten. Tot in de tijd van Apollonius bleef de Griekse sterrenkunde een zweverige activiteit van kamergeleerden.

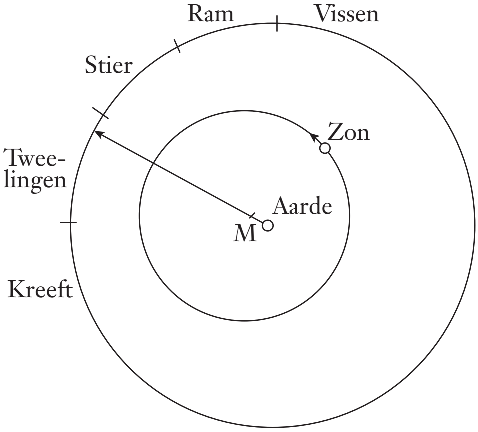
Na 200 voor Christus bloedde de Griekse zuivere wiskunde langzaam dood en tegelijk werd de sterrenkunde levend. Misschien hebben dit opbloeien en afsterven met elkaar te maken, maar we weten niet wat oorzaak is en wat gevolg. De belangrijkste vertegenwoordiger van de nieuwe richting in de sterrenkunde was Hipparchus (circa 150 v. Chr). Hij wilde hetzelfde doen als de Babyloniërs, namelijk voorspellen, maar dan met de Griekse meetkundige modellen. Daarom moest hij eerst proberen om alle gegevens in de Griekse modellen van de zon, maan en planeten numeriek uit waarnemingen te bepalen. Dit is hem gelukt voor de zon en ten dele voor de maan. Hij gebruikte niet alleen zijn eigen waarnemingen, maar ook die van eerdere Griekse astronomen. Ook was hij bekend met Babylonische waarnemingen, sommige van 750 voor Christus, en met enkele Babylonische begrippen zoals de dierenriem. Net als de Babyloniërs werkte hij vaak in het sexagesimaalsysteem, maar de getallen 1 tot en met 59 noteerde hij op Griekse manier: A=1, B=2, ...Θ=9, I=10, IA = 11, IB=12, ...IΘ=19, K=20, Λ=30, M=40, N=50. De Babylonische sterrenkundigen hadden een symbool voor de nul en dit gaven de Grieken aan met een o (van *ouden*, 'niets') met een streepje erboven.

Omdat Hipparchus met meetkundige modellen werkte, moest hij het volgende fundamentele probleem van de trigonometrie (tak van de wiskunde die zich met driehoeksmeting bezighoudt) oplossen: gegeven een boog in een cirkel van bekende diameter. Gevraagd: de lengte van de koorde, dat wil zeggen de verbindingslijn tussen beide uiteinden van de boog (zie figuur 3.1). Hipparchus ontwikkelde een primitieve maar doeltreffende methode om dit probleem op te lossen, en hij berekende tabellen voor de koorden. De lengten van de koorden waren in het algemeen irrationale grootheden, maar Hipparchus benaderde deze met (sexagesimale) getallen zonder de gemoedsbezwaren van zijn voorgangers uit de derde en vierde eeuw voor Christus.

We geven nu als voorbeeld de conclusies van Hipparchus voor de zon (zie figuur 3.2, niet op schaal): de zon doorloopt eens in de 365 + 1/4 – 1/300 dagen met constante snelheid een cirkel om de aarde met straal 490 keer zo groot als de straal van de aarde. Het middelpunt M van die cirkel ligt buiten de aarde, in de richting van het punt in de dierenriem op 5 graden, 30 minuten vanaf het begin van het teken Tweelingen, op een afstand van iets meer dan 20 aardstralen (om precies te zijn, 1/24 van de eerder genoemde waarde van 490 aardstralen). Hipparchus berekende daarna tabellen waarmee de sterrenkundigen eenvoudig, op ieder gewenst moment, de positie van de zon in de dierenriem konden bepalen.



Figuur 3.1: Weergave van een fundamenteel probleem van de trigonometrie.



Figuur 3.2: Hipparchus' berekening van de positie van de zon (niet op schaal).

Omdat er nu echt gerekend werd, moesten de verschijnselen veel preciezer worden gedefinieerd, en hierdoor ontdekte Hipparchus de precessie – het gegeven dat de tekens van de dierenriem, die afhangen van de seizoenen op aarde, heel langzaam verschuiven ten opzichte van de vaste sterren. De dierenriem van de Babyloniërs had te maken met de sterrenbeelden en met de seizoenen. De zon staat altijd in het teken Ram in het begin van de lente, in het teken Kreeft in het begin van de zomer, in de Weegschaal in het begin van de herfst, enzovoort. Door oude en recente waarnemingen te vergelijken, concludeerde Hipparchus dat het verband tussen seizoenen en sterrenbeelden op heel lange termijn verandert, namelijk met één graad per honderd jaar. Hij besloot de dierenriem te laten afhangen van de seizoenen. Dit betekent bijvoorbeeld, dat de zon per definitie altijd aan het begin van het teken Kreeft staat in het begin van de zomer, als zij haar hoogste punt heeft bereikt. Uit de definitie van Hipparchus volgt nu dat de tekens elke honderd jaar één graad terug schuiven ten opzichte van de sterrenbeelden aan de hemel. Het teken Ram schuift dus terug ten opzichte van het sterrenbeeld Ram en is nu, meer dan 2000 jaar na Hipparchus, in het sterrenbeeld Vissen terechtgekomen, en misschien wel in het sterrenbeeld Waterman. (Tegenwoordige astrologen geloven dat nu het Watermantijdperk begint; het probleem met dit soort theorieën is, dat de sterrenbeelden aan de hemel door de mens bedacht zijn en hun grenzen dus ook.)

De methoden van Hipparchus waren niet alle correct en de afstand van de aarde tot de zon is volgens Hipparchus een factor vijftig kleiner dan de tegenwoordig wordt aangenomen. Dit soort fouten zijn onbelangrijk. Het essentiële punt is dat berekeningen en controle van de theorie vanaf Hipparchus mogelijk waren. Vanaf dat moment ging het proces van verbetering steeds verder, door Griekse en islamitische sterrenkundigen die goede waarnemingen deden en die genoeg deskundigheid en energie hadden om de modellen aan te passen. Het model voor de maanbeweging werd geperfectioneerd door Ptolemaeus van Alexandrië (circa 150 na Chr.), die ook modellen voor de planeetbewegingen heeft uitgevonden. Zijn hoofdwerk, de *Almagest*, bevat veel ingewikkelde figuren, massa's getallen en tientallen tabellen waarmee de positie van zon, maan en planeten in de dierenriem op elk gewenst moment door een paar simpele optellingen, aftrekkingen en vermenigvuldigingen kon worden berekend. Ptolemaeus heeft zeer waarschijnlijk assistent-rekenaars in dienst gehad om het ontzaglijke rekenwerk uit te voeren. De Griekse wiskunde, die zo zuiver was begonnen, is dus in toegepaste sfeer geëindigd.

3.2 INDIASE WISKUNDE

In India had wiskunde in de Oudheid en Middeleeuwen veel te maken met religie. In het Hindoeïsme werd wiskunde beoefend door priesters, die tot de kaste van de Brahmanen behoorden. Ook binnen het Boeddhisme, dat vanaf ongeveer 600 voor Christus opkwam, komt wiskunde alleen in Boeddhistische kloosters voor.

Ook het doel van de wiskunde was in het begin zuiver religieus. In de Veda's (vanaf 800 v. Chr.) werden ingewikkelde rituelen beschreven. Hierbij werden altaren gebruikt met gecompliceerde vormen, die volgens precieze regels uit bakstenen moesten worden opgebouwd. Het ritueel had soms een concreet doel, bijvoorbeeld het krijgen van een zoon. Wanneer het ritueel niet het gewenste resultaat had, moest het worden herhaald, en het altaar moest met een factor worden vergroot. Om dit precies te kunnen uitvoeren, was onder andere de stelling van Pythagoras nodig. Dit wil niet zeggen dat Pythagoras naar India is gereisd; 'zijn' stelling was al rond 2000 voor Christus bekend en is waarschijnlijk in verschillende culturen onafhankelijk van elkaar ontdekt.

De echte vedische wiskunde moet onderscheiden worden van de nep-vedische wiskunde van Swami Shri Bharati Krishna Tirthaji (1884-1960). Deze swami 'ontdekte' op helderziende wijze 'vedische' spreuken, die zogenaamd afkomstig zouden zijn uit gedeelten van de Veda's die niet bewaard zijn gebleven. De spreuken zijn tamelijk nietszeggend, maar werden in verband gebracht met snelle methoden voor het rekenen met decimale getallen en het berekenen van repeterende breuken (bijvoorbeeld 1/19 = 0.052631578947368 42). Deze methodes zouden daarom aan de auteurs van de Veda's (circa 500 v.Chr.) al bekend geweest moeten zijn. Deze 'vedische' wiskunde is populair in India en ook in het Westen bij beoefenaars van de transcendente meditatie van Maharishi Mahesh Yogi. Historisch gezien is het onzin hier van 'vedische' wiskunde te spreken, omdat het decimale positiesysteem meer dan een millennium jonger is dan de Veda's.

In de eerste eeuwen na Christus ontstond in India een sterrenkundige traditie uit een wonderlijk mengsel van Indiase kosmologie en Babylonische en Griekse ideeën, die in de periode na Alexander de Grote hun weg naar India hadden gevonden. De Indiase sterrenkundigen beschreven de bewegingen van de planeten met Griekse modellen uit de tijd voor Ptolemaeus. Deze Griekse modellen werden in een Indiaas filosofisch kader geplaatst. Men ging ervan uit dat alle planeten in het begin van het teken Ram stonden bij het ontstaan van de schepping en dat dit weer het geval zou zijn een 'dag van Brahma' later, waarbij een dag van Brahma precies 4.320.000.000 jaar lang is. Omdat dit getal enorm groot is, was het niet zo moeilijk de (Babylonische en Griekse) snelheden van de planeten zo aan te passen dat dit precies klopte. Verder dachten de Indiase priesters dat de planeten vastzaten aan koorden van wind en door goden heen en weer werden geslingerd; dit was de verklaring van de (schijnbaar onregelmatige) beweging op epicykels. In ieder geval waren de Indiase priesters na overname van het Babylonisch en vroeg-Griekse erfgoed in staat hemelverschijnselen en planeetstanden te voorspellen. Het doel hiervan was niet zozeer de kalender, maar vooral vedische astrologie. Tegenwoordig kan men in India aan sommige universiteiten vedische astrologie studeren, ondanks de tegenstand van veel gerenommeerde Indiase natuur- en sterrenkundigen. De moderne vedische astrologen laten het rekenwerk graag aan de computer over, zodat zij de wiskundige vaardigheden en inzichten van hun middeleeuwse voorgangers niet meer nodig hebben.

Wiskunde in middeleeuws India vinden we praktisch uitsluitend in teksten over sterrenkunde. Na 500 vinden we in de sterrenkundige berekeningen de eerste tekenen van het decimale positiestelsel, dat we nu nog steeds gebruiken voor het schrijven van gehele getallen met slechts tien symbolen, die tegenwoordig de vorm 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 hebben. Dit stelsel is ontstaan uit een ouder Indiaas getalsysteem met de voorlopers van 'onze' symbolen 1 tot en met 9, en speciale symbolen voor tientallen en honderdtallen. Het is tegenwoordig een heet hangijzer hoe men op het idee gekomen is, de symbolen voor de tientallen, honderdtallen, enzovoort te vervangen door combinaties van de symbolen voor de eenheden en een nieuw symbool 0 (zodat het aparte symbool voor tweehonderd vervangen werd door 200). Sommige onderzoekers nemen aan dat dit een authentieke Indiase ontdekking is, die te maken heeft met de structuur van de taal, het Sanskriet. Anderen vermoeden dat een Indiase astronoom op het idee van een tientallig positiestelsel is gekomen, door het Babylonische sexagesimale positiesysteem dat met de Babylonische en/of Griekse sterrenkunde meegekomen was naar India. Vast staat dat het decimale positiesysteem omstreeks 775 naar de Arabische wereld is overgebracht, samen met een andere Indiase vernieuwing op het gebied van de trigonometrie, de sinus.

Dit begrip is op een tamelijk vreemde manier aan zijn naam gekomen. Hierboven is al vermeld dat Hipparchus de koorde gebruikte als trigonometrisch basisbegrip. De Indiërs namen dit idee over, maar ontdekten dat het handiger was met de halve koorde te rekenen. De vertalers in het Arabisch wisten geen raad met het Sanskrietwoord koorde (*jiva*) en lieten het gewoon staan, maar zij vervingen de letter v, die niet in het Arabisch bestaat, door een b. Het aldus ontstane woord *jiba* leek in geschreven vorm als twee druppels water op het woord *jaib*, met betekenis 'golf, plooi, portemonnee'. De Arabische wiskundigen gingen dit gebruiken en vergaten de oorspronkelijke betekenis 'koorde' en ook het feit dat eigenlijk de helft daarvan bedoeld was. De middeleeuwse Latijnse vertalers hebben 'golf' letterlijk vertaald als 'sinus'. Het woord sinus heeft dus niets te maken met het feit dat de grafiek van deze functie (grafieken werden sinds de zeventiende eeuw gebruikt) een golf weergeeft. Verderop zullen we een concreet voorbeeld behandelen van een trigonometrische ontdekking door een Indiase wiskundige.

In de Indiase teksten over sterrenkunde vinden we soms hoofdstukken over wiskundige onderwerpen die niets met sterrenkunde te maken hebben. Een voorbeeld zijn de uiteenzettingen over algebra, met daarin het Sanskrietwoord *mula*, ‘wortel’, dat via het Arabisch en het Latijn in het moderne wiskundige taalgebruik terecht is gekomen. De algebra bereikte in India een hoog niveau. In de twaalfde eeuw vond de sterrenkundige Bhāskara II op een slimme manier de twee kleinste natuurlijke getallen zodat het kwadraat van de ene gelijk is aan één plus 61 maal het kwadraat van de andere, namelijk 1.766.319.049 en 226.153.980. De vergelijking $x^2=1+61y^2$ is later genoemd naar de Engelse wiskundige John Pell (1611-1685).

Vanaf de zeventiende eeuw verandert de Indiase sterrenkunde, eerst door contacten met de islamitische wereld en daarna door de koloniale overheersing. Tot in de negentiende eeuw waren er nog mensen in India die met behulp van traditionele methoden zonsverduisteringen konden voorspellen. Een van de grootste wiskundigen die ooit geleefd hebben, was Srinavasa Ramanujan (1887-1920) uit Zuid-India. Ramanujan staat niet meer in de authentieke Indiase traditie omdat hij de invloed van de Europese wiskunde heeft ondergaan en de moderne Europese algebraïsche notatie gebruikte.

3.3 ARABISCHE WISKUNDE

Toen de profeet Mohammad in 632 stierf, had hij de stammen op het Arabisch schiereiland verenigd. In de Koran is duidelijk te zien dat de woestijnbewoners van Arabië goede handelsrekenaars waren, die praktische kennis van de zon, maan en sterren bezaten, maar zich niet bezighielden met sterrenkundige berekeningen, zoals de Babyloniërs en de Grieken dat hadden gedaan. Mohammad werd opgevolgd door een ‘kalief’ (vertegenwoordiger). Omstreeks 750 kwam het kalifaat in handen van de dynastie van de Abbasieden. Er werd een nieuwe hoofdstad van het rijk gesticht, namelijk Bagdad, niet ver van Iran vandaan. In het voor-islamitische Iran waren sterrenkundigen en astrologen die met Indiase methoden werkten en na de verovering van hun land door de Moslims min of meer ongehinderd doorgingen met hun werk. Onder andere door de sterke Iraanse invloed aan het hof van de kalief in Bagdad, ontstond daar interesse in exacte wetenschappen. Men was al gauw uitgekeken op wat in Iran zelf nog bekend was. Omstreeks 775 werd een delegatie uit India naar Bagdad uitgenodigd om aan het hof van de kalief de Indiase sterrenkunde uit te leggen. Ook werden toen teksten uit het Sanskriet in het Arabisch vertaald.

Na 800 richtte men zich in Bagdad op het Griekse cultuurgoed uit de Oudheid. Voor veel geld werden Griekse manuscripten uit Byzantium en elders aangekocht, en er werd daarna veel energie besteed om die in het Arabisch te vertalen. Er doken steeds nieuwe Griekse handschriften op, en de vertalers begrepen de stof ook steeds beter. De *Elementen* van Euclides en de *Almagest* van Ptolemaeus werden diverse keren in het Arabisch vertaald. Dankzij de Arabische vertalers is een hele serie Griekse werken bewaard gebleven, waarvan de Griekse grondtekst verloren is gegaan, zoals de Boeken vijf tot zeven van de *Kegelsneden* van Apollonius en de *Spherica* van Menelaus.

In die tijd ontstonden ook de eerste Arabische werken over wiskunde. Een van de vroegste auteurs is Muhammad ibn Mūsā al-Khwārizmī, uit Khwarizm bij het Aralmeer. Deze man schreef een boekje over rekenen met de Indiase cijfers dat in het Latijn is vertaald, waarbij zijn naam werd verbasterd tot *Algorismi*. De Europese lezers waren zich niet meer bewust van het feit dat hiermee een mens werd bedoeld en zo komt het dat het woord *algoritme* tegenwoordig rekenmethode betekent. Aan al-Khwārizmī's boekje danken we ook het woord 'cijfer', dat is afgeleid van het Arabische woord *sifr*. Dit woord is een vertaling van het Sanskrietwoord *shunya*, met betekenis 'leegte'. Deze leegte verwees naar de nul, voor veel mensen de steen des aanstoots van het hele systeem, want hoe kan iets nu niets betekenen? Het rekenen met Indiase cijfers was niet erg populair in de vroeg-middeleeuwse islamitische wereld. Het werd vooral gebruikt voor heel grote getallen, en al-Khwārizmī gebruikte als propagandamiddel de beroemde schaakbordopgave. Op een schaakbord leggen we een korreltje in het eerste vak, twee korreltjes in het tweede vak, vier korreltjes in het derde, en zo verdubbelen we steeds het aantal. Vraag: hoeveel korreltjes liggen er op het schaakbord als geheel? Al-Khwārizmī gaf in Indiase cijfers het antwoord 18.446.744.073.709.551.615.

De sterrenkundigen rekenden met graden, minuten en seconden in het sexagesimaalsysteem, op de manier van Hipparchus en Ptolemaeus. Voor de minuten en seconden waren alleen de getallen 1 tot en met 59 nodig en het Griekse symbool voor de nul, namelijk de o met een streepje erboven. De getallen 1 tot en met 59, en de graden van 1 tot 360 werden weergegeven met behulp van de 28 letters van het Arabische alfabet, die numerieke waarden hebben van 1, 2, ... , 9, 10, 20, ... , 90, 100, 200 ... 900, 1000. Net als bij de Grieken werd het getal 43 weergegeven met de letter *mim* voor 40, gevolgd door de letter *jim* voor 3. Dit systeem voldeed in de praktijk uitstekend.

Al-Khwārizmī schreef over het rekenen met onbekende getallen het 'boek over de reparatie en confrontatie'. Met reparatie bedoelde al-Khwārizmī het volgende: als een onbekend getal min 4 gelijk is aan 3, is die 4 dus een 'defect'. We repareren dit defect door de 4 naar de andere kant te brengen, dan is het onbekende getal dus 4 + 3. Het woord reparatie is in het Arabisch *al-dzjabr*, in het Westen ook wel uitgesproken als al-gabr. Uiteindelijk is algebra de naam geworden voor de leer van het oplossen van vergelijkingen in onbekende getallen. Al-gabr betekent ook 'reparatie' in de zin van het zetten van gebroken beenderen en deze betekenis is nog zichtbaar in *Don Quichotte* van Cervantes: in dit verhaal moet Sancho Pancha na een van zijn vele ongelukken zijn gebroken ledematen laten zetten bij een *algebrista*. Inhoudelijk bevat het boekje van al-Khwārizmī weinig nieuws, want het hoogtepunt zijn de kwadratische vergelijkingen, die drie millennia eerder in het gebied rond Bagdad ook al werden opgelost. Didactisch is de *Algebra* van al-Khwārizmī een meesterwerk. Alles wordt heel duidelijk uitgelegd en daarna in veel voorbeelden geoefend.

Het begrip 'Arabische wiskunde' verwijst naar het feit dat praktisch alle middeleeuwse wiskundige teksten in het islamitisch cultuurgebied geschreven zijn in het Arabisch. De meeste auteurs hadden een moedertaal of afkomst die niet Arabisch was. De moedertaal van al-Khwārizmī was een Perzische taal, verwant aan het Nederlands, en hij moest Arabisch leren om in Bagdad te kunnen meepraten in de wetenschap. Zijn weg was dus de omgekeerde van die van veel allochtonen van tegenwoordig.

De motivatie van veel wiskundig werk uit de negende eeuw was het verifiëren en corrigeren van de sterrenkunde van Hipparchus en Ptolemaeus. Veel waarnemingen werden overgedaan en met ingewikkelde wiskunde geanalyseerd. Hierdoor vonden de sterrenkundigen dat de precessie 1 graad per 70 jaar was, niet 100 jaar; dat het middelpunt van de cirkel waarop de zon draait, zich met 1 graad per 70 jaar verplaatste door het teken Tweelingen in de richting van de Kreeft, enzovoort.

De grootste bloeiperiode van de Arabische wiskunde lag tussen de tiende en twaalfde eeuw. Veel handschriften met teksten uit die tijd zijn nog niet onderzocht, zodat we nog geen volledig beeld hebben van de vooruitgang die toen is geboekt. Al-Khwārizmī had uitgelegd hoe de kwadratische vergelijking kon worden opgelost, en de wiskundigen na hem werkten aan derdegraads vergelijkingen. De beroemde dichter Omar Khayyam (1048-1131) schreef een boek over oplossingen hiervan met kegelsneden. Deze 'oplossingen' hadden een zeer beperkt nut, omdat kegelsneden moeilijk te tekenen zijn. De echte oplossing van een derdegraads vergelijking is pas in Europa ontdekt in de Renaissance, ook al hadden de Arabische wiskundigen in principe genoeg middelen om deze te vinden.

De bloeiperiode van de Arabische wiskunde loopt tot ongeveer 1450, maar tot in de negentiende eeuw werden teksten gekopieerd in Arabische handschriften. De eigen bijdragen van de Arabische wiskunde bestrijken het hele gebied van de meetkunde (theoretisch en praktisch) en trigonometrie. Zij hebben deze gebieden geleidelijk uitgebreid, maar niet revolutionair veranderd. De Islam stelde een aantal problemen die ook door de wiskundigen en sterrenkundigen werden opgelost, namelijk de berekening van de richting van Mekka, de berekening van de precieze gebedstijden (die afhangen van de stand van de zon) en de voorspelling van de avond waarop de nieuwe maansikkel de eerste keer zichtbaar is. De wiskundige oplossingen werden door de religieuze leiding niet altijd met enthousiasme ontvangen. Vaak hielden zij zich aan de traditionele 'oplossingen' uit de eigen kring, die soms grove benaderingen waren. Een extreem voorbeeld waren sommige Moslims in Spanje die het zuiden als richting van Mekka aanhielden, omdat de profeet Mohammad dat ook had gedaan in Medina (Saoedi-Arabië). Er zijn echter ook Arabische steden waar de berekeningen wel werden geaccepteerd. In de stad Caïro zijn in de Middeleeuwen bij het bouwen van moskeeën drie verschillende richtingen van Mekka gebruikt.

Aan het eind van de tiende eeuw ontstonden de eerste voorzichtige contacten tussen geleerden in de islamitische wereld en in christelijk West-Europa. Vanaf de twaalfde eeuw werden veel wetenschappelijke teksten uit het Arabisch in het middeleeuws Latijn vertaald. Sommige van deze teksten waren van islamitische auteurs, andere waren Arabische vertalingen van Griekse werken. Het christelijke Europa maakte kennis met de *Almagest* van Ptolemaeus via de Arabische vertalingen – dit is nog steeds te zien aan het lidwoord Al- in de titel *Almagest*. De meeste van deze vertalingen ontstonden in Spanje en in mindere mate in Sicilië. Spanje was het uiterste Westen van de islamitische wereld, waar veel ontdekkingen uit het Oosten (bijvoorbeeld die van Omar Khayyam) niet waren doorgedrongen. Men gebruikte daar nog de teksten van Al-Khwārizmī over algebra en rekenkunde uit omstreeks 830, die in het Oosten allang achterhaald waren. Hierdoor maakte Europa in de twaalfde eeuw kennis met een verouderde versie van de Arabische wiskunde en sterrenkunde. Dit beeld werd iets gecorrigeerd doordat de kruidenierszoon Leonardo Fibonacci in Bougie in Algerije wiskunde studeerde en in Europa boeken schreef over wat hij geleerd had en over zijn eigen ontdekkingen. Ook daarna is Arabische kennis op allerlei manieren doorgesijpeld naar Europa, zoals te zien is in de trigonometrie van de Duitse wiskundige Regiomontanus (circa 1450). De ontdekkingen die na de twaalfde eeuw in de oostelijke islamitische wereld gedaan zijn, hebben West-Europa niet meer op tijd bereikt. Een voorbeeld is de bepaling van het getal π door de Iraanse wiskundige al-Kāshī, die verderop in meer detail zal worden beschreven. De Nederlanders en Belgen die in de zestiende eeuw aan hetzelfde probleem werkten, hadden nooit van al-Kāshī en zijn π-benadering gehoord.

Hoe moeten we de bijdrage van de Arabische wiskunde beoordelen? Op deze vraag worden verschillende antwoorden gegeven. Sommige wetenschapshistorici beweren dat de Arabische cultuur ‘slechts’ de Griekse en Indiase wiskunde heeft bewaard en vermengd, en het resultaat aan middeleeuws Europa heeft doorgegeven. Andere auteurs (vaak van Arabische origine) beweren dat vele Europese ontdekkingen in de zeventiende eeuw in wezen al in de middeleeuws islamitische cultuur waren gedaan. Deze visies zijn allebei misleidend. Omstreeks 1000, voordat de Arabische invloed in Europa begon, was de kennis van de wiskunde en sterrenkunde in Europa het absolute nulpunt dicht genaderd. Door de overdracht van kennis van het Arabisch in het Latijn steeg het niveau in Europa enorm. Als dit niet was gebeurd, was de Europese Renaissance niet mogelijk geweest. Er zijn diverse Arabische wiskundige ontdekkingen die niet in het verlengde liggen van het werk van de Grieken. Een voorbeeld is de berekening van de sinus van 1 graad door de reeds genoemde al-Kāshī door middel van de numerieke oplossing van een derdegraads vergelijking.

Vanaf de Renaissance maakte Europa zich echter los van de Arabische erfenis. De wiskundige ontdekkingen in de zestiende en zeventiende eeuw, zoals de algebraïsche symboliek voor bekende grootheden, de analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening staan totaal buiten het middeleeuws Arabische denk-kader. Uit het feit dat de wiskunde in de islamitische cultuur niet fundamenteel is veranderd, moet men niet concluderen dat de islamitische auteurs niet in staat waren zulke processen op gang te brengen. De optica werd revolutionair veranderd door het werk van de Iraakse wiskundige Ibn al-Haytham (circa 965-1040). Door een gelukkig toeval kwam zijn *Optica* in zeven delen in Spanje terecht en werd het werk in de twaalfde eeuw in het Latijn vertaald. Dit boek heeft tot in de zeventiende eeuw grote invloed in Europa gehad.

3.4 INDIASE EN ARABISCHE WISKUNDE: VOORBEELDEN

We zullen nu uit de Indiase en uit de Arabische wiskunde één concreet voorbeeld geven om de lezer een idee te geven van de tradities en hun verschillen. Uit de Indiase traditie kiezen we een ontdekking uit de trigonometrie door Mādhava (omstreeks 1420). Deze wiskundige leefde bij Cochin in de Zuid-Indiase deelstaat Kerala, in een gebied waar de Nederlanders in de zeventiende eeuw handel dreven. De Nederlandse scheepslieden zullen zich niet gerealiseerd hebben dat de Indiase Brahmanen kennis bezaten, die voor zeventiende-eeuwse Nederlandse geleerden heel interessant geweest was. We kunnen dit de scheepslieden niet kwalijk nemen, want we zullen zien dat de Indiase ontdekking op zo'n manier was ingekleed dat zij voor buitenstaanders onbegrijpelijk was.

Mādhava's voorschrift om de sinus te berekenen werd in verzen in het Sanskriet gegeven. We geven deze verzen eerst in het Sanskriet en daarna in letterlijke vertaling:

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṇganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu
ādhastyād guṇitād abhīṣṭadhanuṣaḥ kṛtyā vihṛtyantimasy-
āptam śoddhyam upary upary atha ghanenaivam dhanuṣy antataḥ

nihatya cāpavargeṇa cāpam tattatphalāni ca
haret samūlayugvargais trijyāvargahataiḥ kramāt
cāpam phalāni cādho 'dho nyasyopary upari tyayet
jīvante saṅgraho 'syaiva vidvān ityādinā kṛtaḥ

Vertaling: De wijze koning wiens leger verslagen is, verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is. Wanneer deze vijf getallen in volgorde uitgesproken zijn, degene onderaan vermenigvuldigd met het kwadraat van de gegeven boog gedeeld door (het kwadraat van 5400 minuten) moet het quotiënt steeds worden afgetrokken van wat daarboven staat, maar het laatste moet met de kubus, (en dan afgetrokken) van de boog.

Nadat de boog en alle (eerdere) resultaten met het kwadraat van de boog vermenigvuldigd zijn, moet men delen door de kwadraten van de even getallen plus de wortels daarvan, maal het kwadraat van de straal, op volgorde. Nadat de boog en de resultaten onder elkaar opgeschreven zijn, moet men van beneden naar boven aftrekken. Een samenvatting hiervan staat in het (bovenstaande) vers 'De wijze (koning)'.

Weinig lezers zullen gissen dat deze verzen te maken hebben met een berekening van de sinus! De 'vijf getallen' in het eerste vers worden door Sanskrietletters gecodeerd, die de vijf woorden van het vers over de wijze koning vormen. Het doel hiervan was om deze getallen op een gemakkelijke manier uit het hoofd te kunnen leren. Wanneer de vijf woorden als getallen worden geïnterpreteerd, krijgen we 44 ('wijze'), 3306, 160541, 2735747 en 22203940. Deze getallen moeten we interpreteren in het sexagesimale stelsel.

De betekenis van de rest van het eerste vers is als volgt: om de sinus van een boog (in boogminuten) uit te rekenen, delen we die boog door 5400, we krijgen dan een breuk b. Kwadrateer de breuk, vermenigvuldig het kwadraat met 44/216000, en trek het product af van 33/3600 + 06/216000. Vermenigvuldig het ontstane verschil met het kwadraat van de breuk b, en trek het product af van 16/60 + 05/3600 + 41/216000. Vermenigvuldig het ontstane verschil weer met het kwadraat van de breuk b, en trek het product af van 273/60 + 57/3600 + 47/216000. Vermenigvuldig het ontstane verschil nogmaals met het kwadraat van de breuk b, en trek het product af van 2220/60 + 39/3600 + 40/216000. Ten slotte, vermenigvuldig het ontstane verschil met de derde macht van de breuk b, en trek het product af van de boog. Het resultaat is de Indiase sinus (die gelijk is aan 3438 maal de moderne). In het tweede vers staat de algemene formule voor de berekening van de sinus.[1] Wiskundig geschoolden kunnen hierin met enige moeite de Taylorreeks voor de sinus ontdekken, die in Europa pas tegen het eind van de zeventiende eeuw gevonden werd.

Het voorbeeld maakt drie dingen duidelijk. Ten eerste, dat sommige Indiase wiskundige ontdekkingen een heel hoog niveau hadden. Ten tweede, dat die ontdekkingen in verzen werden vastgelegd, opdat ze gemakkelijk gereciteerd en uit het hoofd geleerd konden worden en mondeling konden worden doorgegeven. Ten derde, dat het zonder hulp van een leraar onmogelijk was om deze verzen te begrijpen. Ergens in de zeventiende eeuw is de laatste Indiase Brahmaan die deze verzen over de sinus begreep, gestorven. De ontdekkingen van Mādhava zijn pas opnieuw bekend geworden in de negentiende en twintigste eeuw door onderzoek van oude manuscripten. De onderzoekers konden de verzen alleen begrijpen doordat dezelfde wiskunde in Europa allang herontdekt was.

Uit de Arabische wiskunde nemen we als voorbeeld de bepaling van π door de bovengenoemde Iraanse wiskundige al-Kāshī. Hij was afkomstig uit de Iraanse stad Kāshān, tegenwoordig een stad van 400.000 inwoners aan de rand van de woestijn, ongeveer 300 kilometer ten zuiden van Teheran. Al-Kāshī verbleef vanaf 1420 in Samarkand aan het hof van de Turkse vorst Ulugh Beg, die zelf ook veel belangstelling voor wiskunde en sterrenkunde had en hierover regelmatig seminaria hield. Voor het gemak gebruiken we hieronder het moderne symbool π om de verhouding van omtrek en diameter van de cirkel aan te geven. Archimedes had berekend dat π tussen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ ligt, maar dit was al-Kāshī niet nauwkeurig genoeg. Al-Kāshī wilde π zo nauwkeurig uitrekenen dat dit voor altijd genoeg zou zijn, dat wil zeggen: zo nauwkeurig dat als je de omtrek van de grootst denkbare cirkel in het heelal zou uitrekenen, de fout zo klein zou zijn dat niemand hem kon meten. Volgens al-Kāshī bestond het heelal uit sferen met als middelpunt de aarde. De buitenste sfeer was een dunne schil waar alle vaste sterren in vast zaten. Omdat er volgens de heersende filosofie geen vacuüm of nutteloze ruimte kon bestaan, moest deze sfeer precies aansluiten bij de sfeer van de planeet Saturnus. Volgens Ptolemaeus was de maximale afstand van Saturnus ongeveer 20.000 aardstralen; al-Kāshī zelf gebruikte de waarde 26.328 aardstralen. Om aan de veilige kant te blijven nam al-Kāshī een cirkel van 600.000 aardstralen. Hij wilde π zo nauwkeurig berekenen dat de onnauwkeurigheid in de omtrek van deze cirkel niet meer dan een haarbreedte mocht zijn.

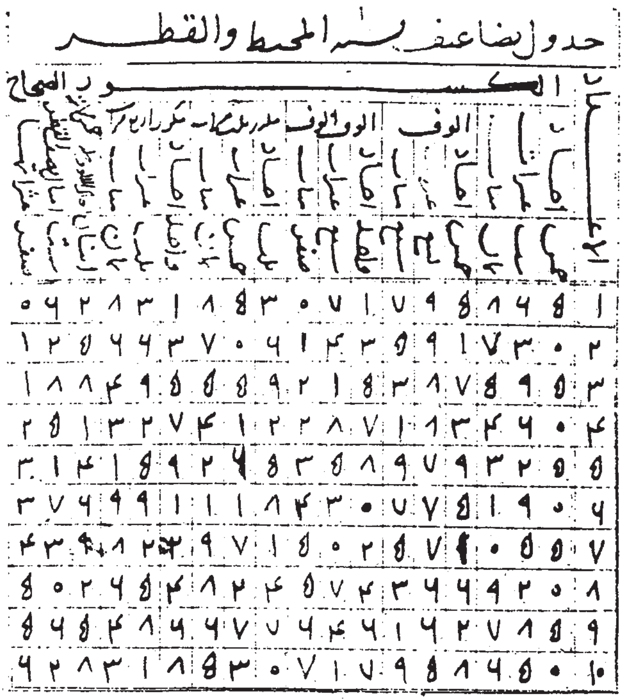
Al-Kāshī kon de omtrek van de cirkel niet rechtstreeks berekenen, maar hij gebruikte een methode van Archimedes, die op het volgende neerkomt. De cirkel met straal 1 heeft omtrek 2π, en de ingeschreven zeshoek in die cirkel heeft omtrek 6. Conclusie $2\pi > 6$, dus $\pi > 3$. We kunnen dus π met een ingeschreven zeshoek benaderen, maar die benadering is niet zo goed. Als Archimedes de omtrek wist van een regelmatige veelhoek met een aantal zijden, kon hij de omtrek uitrekenen van de regelmatige veelhoek met het dubbele aantal zijden die in dezelfde cirkel was ingeschreven. Uit de omtrek van ingeschreven 6-hoek kon hij dus de omtrek van de ingeschreven 12-hoek berekenen, en hieruit de omtrek van de ingeschreven regelmatige 24-hoek, enzovoort. De benaderingen van π worden zo steeds preciezer. Archimedes ging tot de ingeschreven 3.2^5=96-hoek, en vond dat π tussen 3 10/71 en 3 1/7 lag.

Al-Kāshī beredeneerde dat hij moest gaan tot de regelmatige 3×2^{28} = 805.306.368-hoek om de door hem gewenste nauwkeurigheid te krijgen. Daarna beargumenteerde hij dat als hij elk getal in 20 sexagesimale posities uitrekende, de berekening voldoende nauwkeurig zou zijn. Nu zette hij zich aan het rekenwerk. De hoofdschotel bestond uit 18 enorme worteltrekkingen van een getal in 20 sexagesimalen. Uiteindelijk vond hij een waarde van 2π, de verhouding tussen omtrek en straal van de cirkel.

Daarna gaf al-Kāshī een tabel van veelvouden van 2π in sexagesimale notatie en ook in decimale notatie (zie figuur 3.3). Al-Kāshī was één van de uitvinders van het decimale systeem voor breuken (anderen waren al-Uqlīdisī in de tiende eeuw en de Nederlandse wiskundige Simon Stevin omstreeks 1600). Op de vijfde regel zien we 10π, dat er bekend uitziet; de eerste zestien decimalen zijn gelijk aan die van π = 3.14159 26535 89793 24, alleen de komma is verschoven, en de zeventiende decimaal is 5, dus één te hoog. Het getal 5 dat daarna komt betekent dat in die rij 5 maal 2π staat. De tabel in figuur 3.3 is gereproduceerd uit een handschrift dat een directe kopie is van het handschrift van al-Kāshī. De kopie is gemaakt door de zestiende-eeuwse Iraanse wiskundige Bahā' al-Dīn al-Āmulī.

Al-Kāshī legt de dingen uit op de manier van de Griekse wiskunde, en hij bewijst alles wat hij zegt.[2] Als voorbeeld volgt hier een vertaling van een klein stukje van de π-berekening: (zie figuur 3.4):

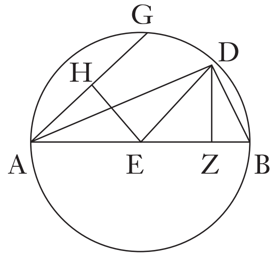
> Ik zeg: de rechthoek van de som van de diameter en de koorde van elke boog die kleiner is dan de halve omtrek, maal de halve diameter, is gelijk aan het kwadraat van de koorde van de boog die de som is van de eerste boog en de helft van het complement ervan tot de halve cirkel.



Figuur 3.3: Al-Kāshī's tabel van veelvouden van 2π.

Om dit te bewijzen trekken we op lijn AB de halve cirkel ABG met middelpunt E. We trekken de willekeurige koorde AG, en we halveren haar complement BG tot de halve cirkel in het punt D. We trekken AD. Dan is de bewering dat de rechthoek van de halve diameter maal de som van AB en AG gelijk aan het kwadraat van AD. Bewijs hiervan: we trekken BD. Dan is hoek ADB recht, volgens stelling dertig van boek drie van de *Elementen* (van Euclides). Dan trekken we uit punt D loodlijn DZ op lijn AB. Dan ontstaan de driehoeken DBZ, DAZ die gelijkvormig zijn met elkaar en met driehoek ABD, wegens stelling acht van boek zes van de *Elementen*. Dus is de verhouding van de diameter AB tot AD gelijk aan de verhouding van AD tot AZ. Dus is volgens stelling negentien van boek zeven van de *Elementen*...

Het proza van al-Kāshī is slaapverwekkend, maar uiteindelijk veel begrijpelijker dan de Indiase verzen. Omdat de lezer de denkstappen allemaal zelf kon volgen, was de Arabische wiskunde beter geschikt voor zelfstudie dan de Indiase.



Figuur 3.4: Al-Kāshī's berekening van π.

3.5 CONCLUSIE

De twee voorbeelden hebben te maken met een belangrijk verschil tussen de Arabische en Indiase wiskunde. De Arabische sterrenkunde was gebaseerd op de *Almagest* van Ptolemaeus en daarom moesten Arabische sterrenkundigen een hele reeks van Griekse werken (inclusief de *Elementen* van Euclides) in Arabische vertaling bestuderen als voorbereiding voor hun eigenlijke sterrenkundige werk. Zo raakte de Griekse meetkunde met de bijbehorende axioma's en bewijzen wijdverspreid in de islamitische cultuur. De *Almagest* van Ptolemaeus en de Griekse meetkunde hebben het middeleeuwse India niet bereikt. Daardoor heeft de Indiase wiskunde haar sterk intuïtieve karakter behouden.

Dit verschil heeft enigszins te maken met een verschil in de verhouding van de wiskundebeoefenaars tot de gevestigde religie. In India waren de wiskundigen en sterrenkundigen lid van de kaste van de Brahmanen, dat wil zeggen de priesters. In de Islam lag dit anders. In de eerste eeuwen van het kalifaat in Bagdad stonden belangrijke theologen open voor exacte wetenschappen en ook voor rationeel onderzoek van de Koran. Na de tiende eeuw had een grote groep islamitische theologen steeds meer wantrouwen jegens wiskunde, natuurwetenschappen en filosofie, omdat deze afkomstig waren uit Griekse (heidense) bronnen, en samenhingen met een wereldbeeld dat mogelijk in conflict kon zijn met de openbaring van de Koran. Uitgaande van de Koran en uitspraken van Mohammad, ontwierpen sommige theologen hun eigen primitieve wereldbeeld met bijvoorbeeld een platte aarde, in strijd met de elementaire inzichten van de Griekse sterrenkunde. Dit hing samen met opvattingen dat de Koran eeuwig, ongeschapen, absoluut geldig en letterlijk waar is, en dat vooruitgang gelijk staat aan terugkeer naar de tijd en de samenleving van de Profeet Mohammad. Deze fundamentalistische opvattingen zijn een van de oorzaken waardoor de ontwikkeling van de wetenschap in de islamitische cultuur uiteindelijk tot stilstand is gekomen.

NOTEN

1. $\mathrm{Sin}\,\alpha = R\,\mathrm{Sin}\,{}^{\alpha}/_{R} = \alpha - \alpha \cdot [\alpha^2/\{R^2 \cdot (2^2+2)\}] + \alpha \cdot [\alpha^2/\{R^2 \cdot (2^2+2)\}] \cdot [\alpha^2/\{R^2 \cdot (4^2+4)\}] - \ldots$ met $R = {}^{10800}/_{\pi} \approx 3438$, α gemeten in boogminuten, en $\mathrm{Sin}\,\alpha$ de Indiase sinus, deze is gelijk aan $R \sin {}^{\alpha}/_{R}$ met sin onze sinus, ${}^{\alpha}/_{R}$ in radialen. N.B. in India was de boogminuut ook een lengtemaat, vandaar $2\pi R = 60 \cdot 360$.
2. Al-Kāshī's bepaling van π is gepubliceerd met Duitse vertaling in Paul Luckey, 'Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-Risala al-muhitiya) von Jamshid b. Mas'ud al-Kashi, übersetzt und erläutert von P. Luckey', herausgegeben von Alfred Siggel. *Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften* 1950, 6. Berlin 1953.

LITERATUUR

Berggren, J. Len, *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam*, New York: Springer, 1986.

Gold, D., D. Pingree, 'A Hitherto Unknown Sanskrit Work concerning Mādhava's Derivation of the Power Series for Sine and Cosine', *Historia Scientiarum* 42 (1991), pp. 49-65. (Hieruit zijn de Sanskrietverzen geciteerd.)

Youschkewitch, A.P., *Mathematik im Mittelalter*, Leipzig: Teubner, 1961.

Een uitgebreide bibliografie van Nederlandstalige literatuur over de geschiedenis van de wiskunde tot 1900 is te vinden op: www.math.uu.nl/people/hogend/gwbib.html.

4
De zeventiende eeuw – wiskunde aan het begin van de Moderne Tijd

Henk J.M. Bos

4.1 INLEIDING

Vergeleken met de Europese middeleeuwen en de Renaissance bracht de zeventiende eeuw een explosieve groei van wiskundige activiteit. De hoofdlijnen in die activiteit waren deze (op de details wordt hieronder nader ingegaan): In de analytische meetkunde (Descartes, Fermat) werden de methoden van meetkunde en algebra gecombineerd, waardoor een rijkdom aan nieuw wiskundig materiaal aan het licht werd gebracht, in het bijzonder veel voordien onbekende kromme lijnen in het platte vlak. Vervolgens werden, in de differentiaal- en integraalrekening (Newton, Leibniz), de technieken om zulke krommen te bestuderen uitgebreid, in het bijzonder met methoden om situaties te begrijpen waarin wiskundige limietprocessen optreden. Daarmee kregen wiskundigen een middel in handen, namelijk *differentiaalvergelijkingen* om bewegings- en veranderingsprocessen in de natuur te analyseren, zoals bijvoorbeeld de beweging van een vallend voorwerp of van een planeet om de zon, de afbuiging van lichtstralen door een medium met variabele brekingsindex, en de verandering van de vorm van een balk als men die met gewichten belast. De kromme lijnen van de analytische meetkunde konden in de analyse van deze processen de rol spelen van de baan van de planeet of het pad van de lichtstraal; ze konden ook verbanden weergeven, bijvoorbeeld tussen de tijd en de afgelegde weg bij bewegingen of tussen de snelheid en de luchtweerstand van een projectiel.

Een doorbraak

Sinds het eind van de Renaissance beleefde de natuurwetenschap een groei en vernieuwing zo hevig dat men er gewoonlijk de naam 'wetenschappelijke revolutie' aan geeft. Deze revolutie kenmerkte zich door de overtuiging dat natuurwetenschap zich moest baseren op waarnemingen en experimenten, en dat de beschrijving en theoretische verklaring van natuurprocessen bij voorkeur quantitatief, en daardoor wiskundig moesten zijn. In tegenstelling tot de analytische meetkunde, die meer een intern wiskundige ontwikkeling vormde, paste de differentiaal- en integraalrekening naadloos in het nieuwe elan van de wetenschappelijke revolutie. De nieuwe technieken van het vak, en in het bijzonder de differentiaalvergelijkingen, werden uitgewerkt in een intensieve wisselwerking tussen wiskunde en die onderdelen van de natuurwetenschap die zich het meest voor quantitatieve behandeling leenden, namelijk de astronomie en de mechanica. De differentiaal- en integraalrekening ontsloot dus, met de differentiaalvergelijkingen als sleutel, een probleemgebied dat kenmerkend werd en bleef voor de mathematische natuurwetenschappen, namelijk het beschrijven, begrijpen en voorspellen van *continue* (schokvrije) *veranderingsprocessen*. Geavanceerde wiskunde, ontwikkeld en bedreven door een klein aantal experts op zeer hoog niveau, leverde hier een doorbraak in een probleemgebied dat tot ver buiten de wiskunde reikte en door meerdere andere wetenschappen bestreken werd. Die ontsluiting is van enorm belang gebleken, zij het voor lange tijd alleen op theoretisch gebied. Dit betrof dan vooral de bewegingen onder invloed van krachten, de *mechanica* dus, in het bijzonder de hemelmechanica (beweging van manen, planeten en kometen) en de vloeistofmechanica (stroming van water in buizen en rivieren, beweging van objecten in water of andere vloeistoffen). In de negentiende eeuw werden nieuwe terreinen geopend voor onderzoek door de theorie van differentiaalvergelijkingen: warmteleer, elasticiteitsleer en, later in de eeuw, de theorie van elektricteit en magnetisme. Intussen waren spectaculaire toepassingen uitgebleven, voornamelijk omdat, met uitzondering van de hemelmechanica, de theorieën toch te veel simplificaties bevatten om op werkelijke situaties toepasbaar te zijn. In het bijzonder bleken verschijnselen als wrijving, lucht- en vloeistofweerstand lastig meetbaar te zijn of moeilijk te vertalen in hanteerbare differentiaalvergelijkingen. Dit veranderde in de laatste decennia van de negentiende eeuw toen de nieuwe theorie van elektriciteit en magnetisme resultaten afleverde die industrieel geëxploiteerd konden worden (telegraaf, telefoon). Vanaf die tijd werd de maatschappij steeds meer bepaald door de combinatie van industriële productie en de natuurwetenschap, in het bijzonder de mathematische natuurwetenschap in de stijl die we hebben zien ontstaan in de zeventiende eeuw.

Belang

De hier kort aangeduide ontwikkelingen illustreren het belang van de twee meest in het oog springende verworvenheden van de zeventiende-eeuwse wiskunde, de analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening. Men kan dat belang ook verduidelijken door op te merken dat qua omvang en invloed vergelijkbare ontsluitingen van wetenschappelijke probleemgebieden door geavanceerde wiskunde zeldzaam zijn in de geschiedenis. Uit de periode vóór de zeventiende eeuw valt er maar één ander voorbeeld te noemen, namelijke de ontsluiting van het probleemgebied van de *regelmatige cirkelbeweging*. De bewegingen van zon, maan, planeten en sterren aan de hemel zijn, in goede benadering, cirkelbewegingen (of combinaties van zulke bewegingen). Zij vormden eeuwenlang het werkterrein van astronomen, astrologen, geografen, zeevaarders en ontdekkingsreizigers. De wiskundige problemen op dit gebied werden ontsloten, in de vier laatste eeuwen voor Christus in de culturele centra van Mesopotamië en de Grieks sprekende wereld, door de boldriehoeksmeting en het inzicht in (een variant van) de sinus-functie.[1] Er waren in de zeventiende eeuwse wiskunde zeker ook aanzienlijke ontwikkelingen en vernieuwingen die slechts zijdelings of helemaal niet in verband stonden met de boven geschetste hoofdlijn. Deze zullen echter in dit hoofdstuk slechts kort aangeduid worden omdat het belang van de lijn die langs analytische meetkunde naar differentiaal- en integraalrekening leidde uitnodigt om uitvoerig in te gaan op de wiskundige inzichten, ideeën, en dromen die deze ontwikkelingen zo'n vaart gaven.

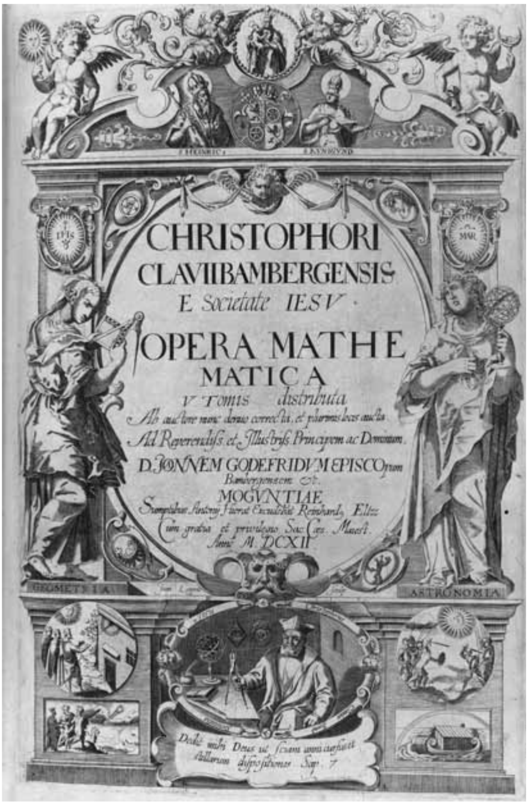
4.2 TWEE MOMENTOPNAMES

Om de omvang van de veranderingen gedurende de zeventiende eeuw te illustreren beginnen we met twee momentopnames van de wiskunde, één aan het begin en één kort na het einde van de eeuw. We nemen daarvoor twee overzichtswerken van wiskunde, namelijk Christoph Clavius' *Opera mathematica* (Wiskundige werken) uit 1611-1612 en Christian Wolffs *Elementa matheseos universae* (Beginselen der gehele wiskunde) uit 1733-1742.

Clavius' Opera Mathematica

Christoph Clavius (1537-1612) kwam uit Bamberg in Duitsland en doceerde wiskunde aan het belangrijkste opleidingsinstituut van de orde der jezuieten in Rome, het *Collegium Romanum*. Hij schreef veel leerboeken en zijn in vijf kloeke delen verzamelde wiskundige werken geven een goed beeld van de wiskunde zoals die op het hoogste academische niveau rond 1600 werd onderwezen. Figuur 4.1 toont het titelblad van de uitgave. Twee heiligen, Heinrich en Kunigund, verwijzen naar Clavius' geboorteplaats, aan hen is namelijk de Dom te Bamberg gewijd. Clavius zelf is midden onder het titelgedeelte geportretteerd, omgeven door vier vignetten die ons eraan herinneren dat wiskunde ook toen niet los stond van de grote wetenschappelijke, religieuze en politieke controversen, ze illustreren namelijk de vier bijbelplaatsen[2] die toentertijd centraal stonden in de discussies over het Copernicaanse wereldbeeld (met de zon, en niet de aarde, in het centrum) en, meer in het algemeen, over de autoriteit van de kerk en de Bijbel in zaken van filosofie en natuurwetenschap. Clavius had een grote rol in de formulering van het standpunt van de jezuieten en van de Katholieke Kerk in deze kwesties.

Clavius behandelde, zeer uitgebreid, de vakgebieden die rond 1600 golden als de wiskundige wetenschappen: Meetkunde, Rekenkunde, Algebra, en Astronomie. De lijst verschilt niet zoveel van het oude 'quadrivium', de vier wiskundige vakken Geometria, Arithmetica, Astronomia en Musica, die aan middeleeuwse kloosterscholen en universiteiten werden onderwezen. (Musica ging vooral over de getal-verhoudingen die optreden bij consonante tonen en de leer van harmonie; het vak gold als een toepassing van arithmetica, terwijl astronomie zijn plaats had in het viertal vakken als toepassing van meetkunde.) De algebra is een nieuwe binnenkomer; muziekleer behandelt Clavius niet. Wat we dus in de momentopname zien is laat-Renaissance wiskunde: De klassieke Griekse schrijvers Euclides (ca. 300 voor Chr.), Apollonius (ca. 200 voor Chr.), Archimedes (ca. 287-212 voor Chr.), zijn sterk aanwezig; de algebra, overgekomen naar Italië als Arabisch wiskundig erfgoed en vandaar ontwikkeld en doorgegeven naar de rest van Europa, is ook vertegenwoordigd, zij het dat Clavius de kort tevoren gevonden oplossingen van derde- en vierdegraads vergelijkingen niet behandelt. Toch was het, zoals we zullen zien, vooral in de algebra dat de wiskundige actie te vinden was omstreeks 1600.



Figuur 4.1: Het titelblad van Clavius' *Opera Mathematica*.

Wolffs Elementa matheseos universae

Onze tweede momentopname stamt uit de jaren 1730. Het is de derde uitgave (in vijf delen) van een overzichtswerk van de 'gehele wiskunde' geschreven door Christian Wolff (1679-1754) en het is dan ook representatief voor de wiskunde van kort na 1700. Net als Clavius was Wolff vooral een academisch docent, in zijn geval aan Duitse protestantse universiteiten.

Voor Wolff en zijn tijdgenoten was wiskunde de leer van *grootheid* en *getal*. 'Grootheid' was de omvattende term voor alles wat gemeten kon worden; 'getal' was het middel waarmee hoeveelheden geteld werden. Er was 'zuivere' (pura) en 'gemengde' (mixta) wiskunde. In de zuivere wiskunde werden grootheid en getal in abstracto bestudeerd, in het bijzonder ging de meetkunde over grootheden en de arithmetica over getallen. In gemengde wiskunde traden de beide begrippen getal en grootheid op gebonden aan concrete objecten die geteld of gemeten konden worden. Het laatste gebied is in de negentiende eeuw 'toegepaste wiskunde' gaan heten, wat eigenlijk jammer is omdat die term suggereert dat tevoren klaarliggende abstracte wiskunde wordt toegepast in concrete situaties; 'gemengd' geeft de realiteit van deze wiskundige activiteit beter weer. Bij Wolff bestaat de zuivere wiskunde, die hij behandelt in het eerste van de vijf delen van de *Elementa*, uit arithmetica, meetkunde, vlakke trigonometrie, en twee vakken die hij noemt 'analyse van eindige grootheden', en 'analyse van oneindige grootheden'. Het eerste analysevak omvat algebra en wat nu analytische meetkunde heet, het tweede de differentiaal- en integraalrekening; beide waren nieuwe, in de zeventiende eeuw ontwikkelde delen van het wiskundige corpus. De gemengde wiskunde beslaat de delen 2, 3, en 4 van Wolffs werk (het vijfde deel is gewijd aan de wiskundige methode en aan eerder verschenen wiskundige werken). Dit deel van de toenmalige wiskunde was zeer omvangrijk: astronomie, mechanica, optica, perspectief, aardrijkskunde, chronologie, architectuur en zelfs het maken van vuurwerk en explosieven behoorden ertoe. Veel van de onderdelen van de gemengde wiskunde waren voor het eerst in de zeventiende eeuw ontstaan, eerder behoorden eigenlijk alleen astronomie en muziekleer tot die categorie. De grote omvang van het vak is een van de meest opvallende karakteristieken van de wiskunde in de zeventiende en achttiende eeuw – in feite is het vak daarvóór en daarna nooit zo omvangrijk geweest. Ondanks de grote omvang werd die 'gehele wiskunde' als samenhangend gezien. Pas in de negentiende eeuw kwam er een splitsing in drie onderling sterk gescheiden delen: zuivere wiskunde, mathematische natuurwetenschappen (vooral astronomie en mechanica), en overige toepassingen van wiskunde. De opbloei van de gemengde wiskunde in de zeventiende eeuw weerspiegelt de grote economische ontwikkelingen in die periode: veel praktische kennis in handel, productie, oorlog en bouw, zoals navigatie, machinebouw, artillerie en architectuur, moesten op grote schaal onderwezen worden; die kennis werd tot dat didactische doel omgevormd, waarbij de vorm van presentatie vaak aan de wiskunde (in het bijzonder aan de *Elementen* van Euclides) ontleend werd en de opname van deze vakken in het wiskundige corpus bevestigde hun aanzien. Maar de gemengde wiskunde leverde niet veel nieuwe actie op theoretisch gebied. Actie en spanning waren te vinden in de nieuwe 'analyses' en de toepassingen daarvan in de mechanica en hemelmechanica door de groten van de wetenschappelijke revolutie, Galileo Galilei (1564-1642), René Descartes (1596-1650), Christiaan Huygens (1629-1695), Isaac Newton, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en hun achttiende-eeuwse volgelingen. De reden dat deze baanbrekende toepassingen niet tot de gemengde wiskunde werden gerekend was dat ze niet pasten in een praktijk (hoewel ze wel gedeeltelijk geïnspireerd werden door praktische problemen). Zij pasten binnen wat 'Philosophia Naturalis' heette, het onderdeel van de filosofie dat zich toelegde op de verklaring van de natuurverschijnselen. Het boek waarin Newton in 1687 zijn nieuwe ontdekkingen publiceerde heette dan ook *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, dat wil zeggen: de wiskundige beginselen van de filosofie der natuur.

Andere thema's

Na bovenstaande schets op basis van twee momentopnames concentreren we ons op de in de inleiding genoemde hoofdlijn in de ontwikkeling van de zeventiende-eeuwse wiskunde. Dat heeft tot gevolg dat een aantal thema's die gewoonlijk in het verhaal van de zeventiende-eeuwse wiskunde worden meegenomen niet aan bod komen. De belangrijkste daarvan willen we in elk geval noemen. Het zijn: de wiskundige theorie van het *perspectief*, voor het eerst in afgeronde vorm geformuleerd rond 1600 door Guidobaldo del Monte (1545-1607) in

Italië en Simon Stevin (1548-1620) in Nederland; de *logaritmen* gebaseerd op een idee dat opkwam in kringen van professionele rekenaars in astronomie en navigatie en leidde tot de eerste publicatie van logaritmentafels in de jaren 1610, door John Napier (1550-1617); de aanzetten tot een *projectieve meetkunde* in het werk van Girard Desargues (1591-1661) en Blaise Pascal (1623-1662); de *getaltheorie* waarvoor Fermat, geïnspireerd door het kort tevoren bekend geworden werk van Diophantus, veel nieuwe methoden ontwikkelde en met de problemen die hij oploste (met bewijs, of zonder, zoals bij het beroemde 'probleem van Fermat') een onderzoeksagenda aangaf die tot de huidige tijd wiskundigen fascineert; en de studies over kansrekening in verband met kansspelen (Huygens, Fermat) en levensverzekeringen (Jan de Witt (1625-1672)), die het begin vormden van de wiskundige *waarschijnlijkheidsrekening*. Ook zal het *onderwijs* in de wiskunde, en de overige contexten waarin de zuivere en de gemengde wiskunde werden bedreven, hier onderbelicht blijven. De korte literatuuropgave aan het eind van dit hoofdstuk is bedoeld als een eerste ingang voor degenen die zich verder in de geschiedenis van deze onderwerpen willen verdiepen.

4.3 EEN SLEUTELWOORD: ANALYSE

Het avontuur van de wiskunde speelde zich in de zeventiende eeuw vooral af in de algebra, de analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening. In de differentiaal- en integraalrekening werd vaak met begrippen gewerkt die met het wiskundige oneindig te maken hadden, in het bijzonder met processen waarin een grootheid onbeperkt groeit ('oneindig groot') of onbeperkt dicht nadert tot een andere grootheid ('oneindig kleine' afstand).[3] Daarom noemde Wolff de nieuwe wiskunde van Newton en Leibniz 'analyse van oneindige grootheden' ('analysis infinitorum'), in contrast met de algebra en de analytische meetkunde, waar alleen eindige grootheden voorkwamen en die hij dus 'analyse van eindige grootheden' ('analysis finitorum') noemde. Zo werd 'analyse' een sleutelwoord in de wiskundige vernieuwingen in de zeventiende eeuw.

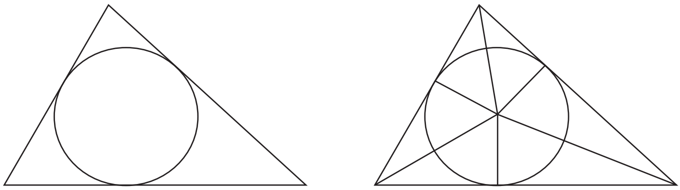
Algebra uit Arabië

We beginnen de schets van de ontwikkelingen leidend tot de beide analyses die Wolff noemde in de late Middeleeuwen en de Renaissance. Er drong toen in West-Europa spannend wiskundig nieuws uit Arabische landen door, over een nieuwe methode om problemen over getallen op te lossen. Men noemde die methode '*Algebra*', een verbastering van een woord uit de titel van het Arabische boek waaruit men het leerde. Terugkijkend vanuit een latere eeuw, en na een lange gewenning aan de algebra met een 'onbekende' x en met vergelijkingen, is het moeilijk zich de hoge verwachtingen en het enthousiasme voor te stellen voor wat toch eigenlijk een simpele methode was, namelijk het gebruik van een kort woord of een symbool voor het onbekende getal dat je wilt weten. Maar voor die tijd was het een wonderbaarlijke noviteit met een verrassende kracht, die allerlei nieuwe wegen opende. Men leerde dus gretig dat het handig was om bij een probleem over getallen het gevraagde getal een naam te geven, meestal een variant van 'ding' (in Italië 'cosa', in Duitsland verbasterd tot 'Coss', algebra heette daar, en ook in Nederland, nog lang de 'Cossische Kunst'). Men leerde ook dat je met een naam voor het onbekende getal, en nog beter met een symbool ervoor, kon rekenen zonder dat je wist wat dat getal was. Je deed dat door wat je wel wist over het getal op te schrijven als een vergelijking en dan te gaan rekenen. Dat lijkt op het eerste gezicht zinloos, maar de praktijk leerde dat je met enige handigheid de vergelijking vaak kon omrekenen in de vorm ding = getal, en dan had je het antwoord. En als dat niet gebeurde dan leerde je toch op een of andere manier meer over het probleem dan je eerst wist. Het wonder van de algebra: net doen als of je de uitkomst weet helpt bij het vinden van de uitkomst. Ook de tweede en de derde (en soms ook hogere) machten van het gevraagde getal kregen hun eigen namen. In de vijftiende en zestiende eeuw werden symbolen ontwikkeld om de namen verkort op te schrijven. Er waren verschillende zulke 'cossische' symbolen in omloop. François Viète (1540-1603) begon met het gebruik van letters in plaats van de cossische speciale symbolen en Descartes was de eerste die de letter x gebruikte als vast symbool voor een onbekende; hij gaf ook de machten met kleine cijfers in de exponent aan: x^2, x^3, etc. Intussen waren in de zestiende eeuw in Italië essentiële successen geboekt in de algebra, met name werden (door Nicolo Tartaglia (ca. 1500-1557) en Ludovico Ferrari (1522-1565)) nieuwe methoden gevonden waarmee men derde- en vierdegraads vergelijkingen kon oplossen. Die methoden werden uitgelegd in een omvangrijk algebra boek van Girolamo Cardano (1501-1576) dat in 1545 verscheen. In de tweede helft van de zestiende eeuw werd ook een verbinding tussen algebra en meetkunde gelegd en daarbij dook het woord 'analyse' op.

Analyse uit Griekenland

Rond 1600 werden wiskundigen opnieuw uitgedaagd door spannend nieuws over wiskunde van lang geleden; deze keer de klassiek Griekse wiskunde. In 1582 werd voor het eerst (in Latijnse vertaling) een lange tekst gedrukt waarin de laat-klassieke wiskundige Pappus van Alexandrië (ca. 325) veel commentaren en uittreksels van eerdere Griekse werken had verzameld (zijn boek heette dan ook *Collectio* – de verzameling). Het werk was in de Arabische wereld onbekend gebleven. Veel van wat Pappus verzameld had was voor Renaissance-wiskundigen nieuw. Met name schreef Pappus veel over wat de Grieken 'analyse' noemden. Dat bleek een methode te zijn voor het oplossen van meetkundige problemen en tot op zekere hoogte ook voor het vinden van bewijzen voor stellingen. Het feitelijk oplossen van problemen en het bewijzen van stellingen kende men in de Renaissance goed uit de werken van de grote klassieke schrijvers Euclides, Apollonius en Archimedes. Op basis van Pappus' nieuws concludeerden veel wiskundigen rond de eeuwwisseling van 1600 dat de Grieken een vind-methode hadden gehad, die ze 'analyse' noemden, en die ze grotendeels geheim hielden door wel – 'synthetisch' – te bewijzen dat hun resultaten juist waren, maar niet uit te leggen hoe ze gevonden waren. Wat Pappus vertelde over de vind-methode kan uitgelegd worden aan een voorbeeld van een eenvoudig meetkundig probleem (niet van Pappus zelf overigens, zijn voorbeelden waren ingewikkelder). Het probleem is om in een gegeven driehoek een cirkel te tekenen die aan alle zijden raakt. De analyse van dat probleem gaat zo: Veronderstel dat het probleem al opgelost is en bestudeer de figuur die bestaat uit de gegeven driehoek en de nog te vinden cirkel (zie figuur 4.2).

Weliswaar weet je nog niet hoe die figuur, volgens de regels van de meetkunde, met passer en liniaal geconstrueerd kan worden, dat is juist het probleem. Maar je kunt wel je de oplossingsfiguur voor-



Figuur 4.2: Een cirkel die de drie zijden van een driehoek raakt.

stellen en uit de hand schetsen en er zo over redeneren. Zoek naar eigenschappen van de figuur, waarbij je hulplijnen mag toevoegen. Zo'n eigenschap is bijvoorbeeld dat de lijnen van het middelpunt van de cirkel naar de punten waar de cirkel aan de zijden raakt, loodrecht staan op die zijden. Een andere: de lijnen vanuit het middelpunt van de cirkel naar de hoekpunten van de driehoek delen de hoeken van de driehoek middendoor. Je hoopt dat die eigenschappen je op het spoor zetten van de oplossing. In ons geval bijvoorbeeld: als je die deellijnen van de hoeken kon trekken (twee zou al genoeg zijn) dan had je ook hun snijpunt verkregen dus dan was het middelpunt van de cirkel gevonden. Kun je die deellijnen van de hoeken trekken? met passer en liniaal? Wel, misschien herken je dat probleem omdat je het in een boek gelezen heb (het staat bij Euclides). En anders moet je eerst dat probleem met een aparte analyse oplossen – het is in elk geval eenvoudiger dan het oorspronkelijke probleem. Als je het middelpunt eenmaal hebt kun je van daaruit loodlijnen op de zijden trekken, daarvoor is namelijk ook een constructie met passer en liniaal bekend. Dan heb je het middelpunt en de straal van de cirkel en kun je de cirkel trekken.

Het was deze manier van redeneren die de Grieken *analyse* noemden, en het resultaat van zo'n analyse is een plan voor de constructie die nu ook uitgevoerd kan worden. Die uitvoering heette de *synthese*, en in ons geval bestaat die uit de volgende constructie: Trek de deellijnen van twee van de hoeken van de driehoek; hun snijpunt is het middelpunt van de gevraagde cirkel; trek vanuit dat middelpunt de loodlijn op een van de zijden, dat is de gevraagde straal; voltooi de cirkel; klaar! Dat is te zeggen, de constructie is klaar, daarna moet nog, uitgaande van axioma's en/of eerder bewezen stellingen, aangetoond worden dat de geconstrueerde cirkel inderdaad aan alle zijden raakt, maar dat was, na zo'n uitgebreide analyse, meestal niet meer zo moeilijk.

Analyse was dus in zekere zin de keerzijde van de axiomatisch-deductieve kant van de Griekse wiskunde; analyse diende het ontdekken van resultaten en constructiemethodes; het axiomatisch-deductief redeneren (de synthese) diende het uitvoeren en bewijzen, dus het zeker stellen van die resultaten en methodes. Analyse werkte door eerst te doen alsof de gevraagde figuur al helemaal bekend was, dan als het ware terug te redeneren naar de gegevens, en dan de redenering om te draaien. Het wonder van de analyse: net doen als of je de uitkomst weet helpt bij het vinden van die uitkomst. Zowel algebra als analyse gingen uit van de oplossing en redeneerden dan heen en weer tussen de gegevens en de oplossing. Die overeenkomst viel op en een aantal wiskundigen kwam tot de conclusie dat er achter de analyse voor meetkundige problemen zoals uitgelegd door Pappus, een algebraïsche methode verscholen lag die rekende met bekende en onbekende lijnstukken in meetkundige figuren en die blijkbaar door de Grieken geheim was gehouden. Dat vermoeden werd ondersteund door het werk van Diophantus (ca. 250 na Chr.) over getaltheorie dat rond het midden van de zestiende eeuw bekend was geworden en waarin met een apart symbool voor het gevraagde getal gerekend werd. Daarin herkende men dus ook een verborgen algebra. Tegenwoordig hebben historici hun twijfels over deze opvatting over de Griekse analyse als geheime algebra, maar rond 1600 leek het idee plausibel genoeg en in elk geval inspireerde het veel wiskundigen om te zoeken naar een goed gebruik van de algebra in de meetkunde.

Oude en nieuwe analyse

Het idee om deze via Pappus bekend geworden analyse te combineren met de algebra was de belangrijkste inspiratie voor Viète. Het resultaat was wat wij zouden noemen *letteralgebra*. In de Renaissance-algebra waren de enige getallen die met symbolen werden aangeduid de onbekende getallen. Voor de andere werden steeds expliciet benoemde getallen gebruikt. De algemene vierkantsvergelijking werd dus niet in de vorm $ax^2 + bx + c = 0$ behandeld, maar aan de hand van een voorbeeld zoals $6x^2 = 7x + 20$; de lezer moest dan begrijpen dat wat onderweg met de 7 gebeurde, in een ander geval, als er bijvoorbeeld 13 voor de x stond, met die 13 uitgevoerd moest worden. De coëfficiënten van vergelijkingen werden dus aangegeven met wat je zou kunnen noemen ‘voorbeeldgetallen’ die eigenlijk algemene, onbepaalde waarden voorstelden. Viète onderkende dat dit gebruik van voorbeeldgetallen niet kon worden volgehouden als de algebra ook voor andere dan getalproblemen bruikbaar moest zijn. In de meetkunde was het heel gebruikelijk om gegeven, maar verder onbepaalde grootheden met letters aan te geven. Bij een gegeven driehoek werden de hoekpunten met *A*, *B*, *C* aangegeven, en de zijden met *AB*, *BC*, *AC*, zonder dat men verder de precieze lengte ervan hoefde te weten, de driehoek was 'gegeven', dat was genoeg voor verdere bewijzen of oplossingen. Viète hoefde dus niet ver te zoeken om vergelijkingen toe te kunnen passen in de meetkunde zonder aan voorbeeldgetallen voor coëfficiënten vast te zitten: gebruik letter-symbolen zowel voor de onbekenden (waarvoor de eerdere algebra al een speciaal symbool gebruikte) als voor de 'gegeven', maar verder onbepaalde grootheden. Viète koos ervoor hoofdletters te gebruiken, en wel klinkers voor onbekende grootheden en medeklinkers voor de gegeven maar verder onbepaalde grootheden. De vierkantsvergelijking die wij als $x^2 + ax = b$ zouden schrijven staat bij Viète als

> '...cum proponetur A quadratum, plus B in A, aequari D quadrato...'

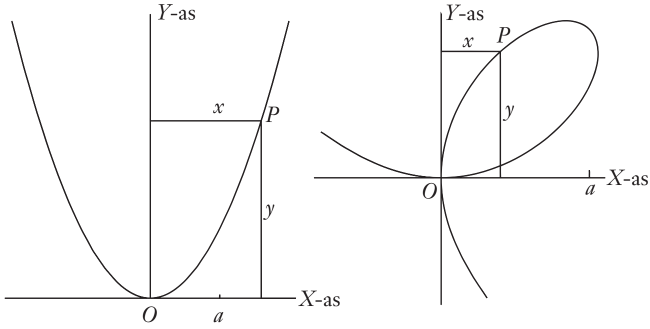
wat letterlijk vertaald (het is Latijn) betekent: 'wanneer de opgave is om het vierkant van A, plus [het product van] B en A gelijk te maken aan het vierkant...' Viète schrijft zulke passages ook wel in meer of minder ver doorgevoerde afkortingen, die wel op formules beginnen te lijken. Het voorbeeld leert ons dat Viète meer geïnteresseerd was in de principes van het gebruik van symbolen dan in handigheid van notatie, wat de verspreiding van zijn ideeën heeft belemmerd. Intussen had hij wel een van de belangrijkste vernieuwingen in de wiskunde op gang gezet: de verbinding van algebra en meetkunde via een letteralgebra, gepaard met het inzicht dat het hier vooral om een vind-methode ging, een analyse, waarmee een probleem eerst werd vertaald in een algebraïsche vergelijking; die werd dan herschreven en zo mogelijk algebraïsch opgelost, en dat resultaat werd terugvertaald tot een oplossing van het probleem. Viète is er niet aan toegekomen om, zoals zijn plan was, zijn geschriften te bundelen in één groot werk. Daarin zou de analyse 'hersteld' worden in de vorm van een 'nieuwe algebra.' Om onderscheid te maken tussen de analyse zoals Pappus die had uitgelegd en de nieuwe algebraïsche vorm die Viète er aan gegeven had noemde men de eerste 'analysis veterum' (de analyse der Ouden) en de letteralgebra 'analysis nova' (de nieuwe analyse) – de eerste betekenisverandering die het woord 'analyse' in de wiskunde doormaakte.

Analytische meetkunde

In de 'nieuwe analyse' van Viète lag de nadruk meer op de algebraische aspecten – vooral de theorie van vergelijkingen – dan op de meetkundige toepassingen. In het bijzonder had hij weinig aandacht voor een meetkundig onderwerp dat kort na hem veel sterker in de belangstelling kwam, namelijk kromme lijnen zoals kegelsneden (ellips, parabool, hyperbool) en ingewikkelder krommen. In de jaren 1630-1640, lieten Descartes en Pierre de Fermat (1601-1665) zien dat ook deze meetkundige objecten zeer goed bestudeerd en begrepen konden worden met behulp van letteralgebra. Beiden waren bekend met de uitgangspunten van Viète en ontwikkelden vereenvoudigde en meer gebruikersvriendelijke notaties, waarbij Fermat zich meer bij Viète's stijl aansloot dan Descartes. Fermat was minder effectief in het verspreiden van zijn resultaten dan Descartes, zodat diens boek *La Géométrie* (De meetkunde) van 1637 in de latere zeventiende eeuw veel meer invloed had; het nu bijna vanzelfsprekende gebruik om in de algebra vooral met kleine letters te werken en de onbekenden aan te geven met de laatste letters van het alfabet, x, y, z, en de onbepaalde grootheden met a, b, c, etc., komt uit dat boek.

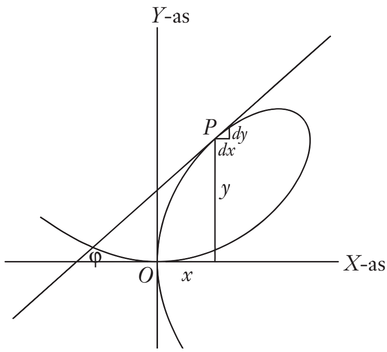
Het meest vernieuwende idee uit Fermats en Descartes' werk was dat de vergelijkingen van de algebra en de rechte en kromme lijnen van de vlakke meetkunde met elkaar in verband kunnen worden gebracht (zie figuur 4.3). De vergelijking $ay = x^2$ beschrijft de parabool; die kromme heeft namelijk precies de eigenschap dat bij ieder punt P de twee lijnen x en y die vanuit P naar de Y-as en de X-as lopen zó liggen dat het product van a en y gelijk is aan het kwadraat van x (in de figuren is a gelijk aan 1 genomen). Bij andere krommen was de definiërende eigenschap, dus de relatie tussen x en y die voor ieder punt P op de kromme moest gelden, ingewikkelder. Zulke eigenschappen konden het best met vergelijkingen weergegeven worden. Een voorbeeld is het zogenaamde 'Blad van Descartes'[4] met de vergelijking $x^3 + y^3 = axy$.

De vergelijkingen die Fermat en Descartes gebruikten om op deze



Figuur 4.3: Parabool met vergelijking $ay = x^2$ (links), en 'Blad van Descartes' met vergelijking $x^3 + y^3 = axy$ (rechts).

manier krommen te kenmerken en te bestuderen waren vrij nieuw in de algebra, het waren namelijk vergelijkingen waarin niet één onbekende optrad maar twee (in het werk van Diophantus kwamen die ook voor, maar in andere vorm en met andere motivatie). Vóór Fermat en Descartes ging de algebra vooral over vergelijkingen in één onbekende. Met die vergelijkingen kon men de meeste meetkundige problemen, namelijk die waarbij bijzondere punten of lijnen in een gegeven figuur gevonden moesten worden, vertalen in algebra, waarna men de meetkundige constructie van die punten of lijnen kon afleiden uit de gevonden vergelijking. De vergelijkingen met twee onbekenden, die in verband met krommen werden ingevoerd, hadden een veelzijdiger functie. In zekere zin vormden ook zij de algebraïsche vertaling van een probleem, namelijk: hoe teken (construeer) ik de kromme met die vergelijking? Maar al gauw betekenden ze meer, ze waren de *algebraïsche weergave* van de kromme, het kenmerk waaraan men een kromme herkende en het startpunt voor onderzoek naar verdere eigenschappen van die kromme. Deze rol was nieuw en bracht een wezenlijke verandering in de wiskunde: tussen de meetkunde en algebra groeide een actief nieuw gebied, 'analytische meetkunde', waarin meetkunde en algebra waren vermengd. Dat gebied vormde zich rond het kernidee dat een kromme niet meer alleen een meetkundig ding is, en een vergelijking niet alleen een algebraïsch ding; het zijn equivalente objecten; men leerde eigenschappen van krommen via vergelijkingen begrijpen en eigenschappen van vergelijkingen via krommen.



Figuur 4.4: Differentiëren: een raaklijn aan het 'Blad van Descartes'.

Differentiaal- en integraalrekening

De verbinding van algebra en meetkunde in de analytische meetkunde bleek zeer effectief in het onderzoek van kromme lijnen zoals cirkels, ellipsen, hyperbolen, parabolen, en hogere-graadsvarianten daarvan. Maar voor het onderzoek van speciale aspecten van krommen, in het bijzonder hun raaklijnen, hun kromming, de oppervlakken die zij begrenzen en hun booglengtes, was meer nodig. Nieuwe begrippen moesten daarvoor gedefinieerd worden en speciale notaties waarmee die begrippen in de formules van de algebra konden worden opgenomen. Dat was het kernidee van de differentiaal- en integraalrekening die door Newton en Leibniz in de periode 1665-1685 werd ontwikkeld.[5]

Met die theorie is het mogelijk om, als men de vergelijking van een kromme kent, daaruit een nieuwe vergelijking af te leiden, de zogenaamde *differentiaalvergelijking* van de kromme, waarmee men de raaklijnen in punten op de kromme kan bepalen.

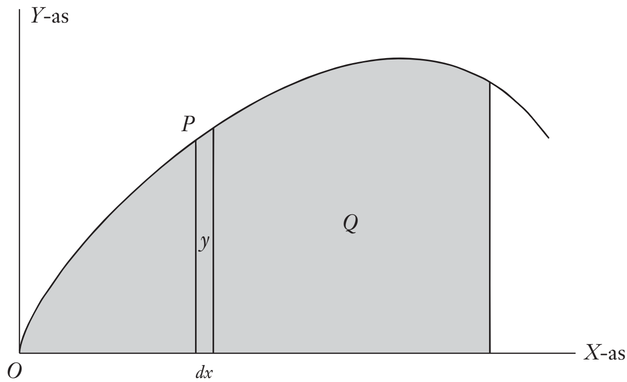
We zagen hierboven dat het 'blad van Descartes' de vergelijking $x^3 + y^3 = axy$ had. Met de door Leibniz en Newton gevonden regels van het *differentiëren* kan men uit deze vergelijking de bijbehorende differentiaalvergelijking afleiden, die is[6]:

$$(3x^2 - ay)dx + (3y^2 - ax)\, dy = 0$$

Hierin treden nieuwe symbolen op, de *differentialen*, *dx* en *dy*, waarvan men uit de bovenstaande vergelijking het quotiënt kan berekenen:

$$dy/dx = -\frac{(3x^2 - ay)}{(3y^2 - ax)}$$

en het blijkt dat voor ieder punt P op de kromme met coördinaten x en y, deze waarde precies de tangens van de hoek φ geeft tussen de raaklijn in P en de horizontale as (zie figuur 4.4). Met differentiëren kan men dus raaklijnen aan krommen bepalen.



Figuur 4.5: Integreren: het oppervlak onder een kromme.

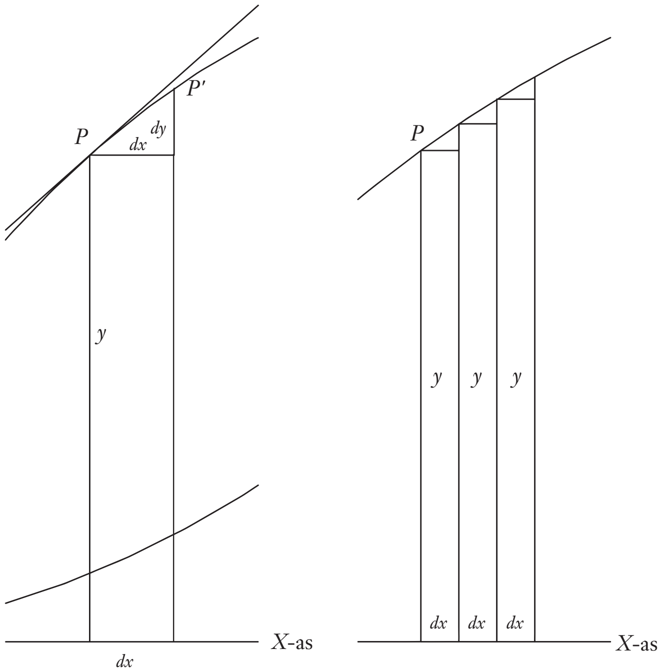
Een ander nieuw symbool, ∫, werd gebruikt om het oppervlak Q onder de kromme aan te geven (zie figuur 4.5).

$$Q = \int y dx$$

Ook voor het rekenen met dit symbool, het *integreren*, werden rekenregels uitgewerkt.

De symbolen dx en dy in deze formules werden meestal geïnterpreteerd als kleine of ook wel 'oneindig kleine' lijnstukken, namelijk de veranderingen van x en y respectievelijk bij overgang van het punt P naar een dichtbij gelegen punt P' op de kromme. Het quotiënt dy/dx was dan, in elk geval bij benadering, gelijk aan de tangens van de raaklijnrichtingshoek φ (zie figuren 4.4, 4.5 en 4.6).

Met die interpretatie kon men het oppervlak onder een kromme zien als samengesteld uit naast elkaar liggende rechthoeken met bases gelijk aan dx, en hoogten gelijk aan y; $\int y dx$ kon dan gelezen worden



Figuur 4.6: Details uit de figuren 4.4 en 4.5.

als de som van de rechthoeken $y \times dx$, een som die, wanneer *dx* klein genoeg gekozen wordt, een goede benadering vormt voor het oppervlak *Q*. Leibniz voerde inderdaad de symbolen *d* en ∫ in als de letters voor ‘differentia’ en ‘summa’ (Latijn voor ‘verschil’ en ‘som’; ∫ was de aparte lange vorm van de letter ‘s’ in schuin schrift of cursief drukletterfont).

Het probleem met die interpretatie was dat, hoe dicht men P' en P ook bij elkaar koos, de beide formules hierboven nooit exact klopten. Ze klopten wel steeds beter naarmate P' dichter bij P werd gekozen, en dat gaf aanleiding tot de gedachte dat die formules wèl klopten bij ‘oneindig kleine’ veranderingen. Maar dat liet de vraag onbeantwoord wat zulke oneindig kleine veranderingen waren en of ze wel bestonden. Het begrip oneindig dat hier speelt is pas in de negentiende eeuw op algemeen aanvaarde manier in de wiskunde ingevoerd. Tot die tijd bleef dus de grondslag waarop de differentiaal- en integraalrekening gevestigd was onzeker.

Raaklijnen aan, en oppervlakken onder krommen waren essentieel voor de wiskundige studie van continue veranderingsprocessen zoals in de mechanica. Wanneer de kromme bijvoorbeeld de baan van een bewegend lichaam weergeeft dan geeft de raaklijn in een punt de richting aan van de snelheid van het lichaam op dat punt. En wanneer de kromme optreedt als middel om de onderlinge afhankelijkheid van fysische grootheden aan te geven dan representeert het oppervlak onder de kromme vaak een derde grootheid die iets te maken heeft met het totale effect van het bestudeerde proces (standaard voorbeeld: bij de grafiek van de snelheid ten opzichte van de tijd geeft het oppervlak onder de grafiek de afgelegde weg aan).

Het avontuur van de analyse

We zagen dat Wolff de differentiaal- en integraalrekening 'analyse van oneindige grootheden' noemde, om het onderwerp niet te verwarren met de letteralgebra en de analytische meetkunde. In de achttiende en negentiende eeuw raakte deze eerdere betekenis van de term in onbruik; 'analyse' ging betekenen wiskunde waarin het oneindige of het oneindig kleine een rol speelde. In de negentiende eeuw leerde men het wiskundig oneindige precies te omschrijven met hulp van het begrip *limiet*, en daarmee kreeg de term 'analyse' zijn huidige betekenis: het geheel van wiskundige theorieën en technieken die gebaseerd zijn op het wiskundige limietbegrip. Zo heeft de term 'analyse' een avontuurlijke ontwikkeling begeleid van twee wiskundige kernideeën, namelijk dat men rekenen kan met wiskundige dingen die men nog niet kent of gevonden heeft, en dat men daardoor die dingen vaak ook vinden kan of in elk geval beter kan begrijpen. In dit proces was de zeventiende eeuw een cruciale periode, toen kwam de ontwikkeling in een stroomversnelling, en die is sindsdien eigenlijk nooit meer tot rust gekomen.

4.4 ANALYSE ALS SLEUTEL

De stroomversnelling in de analyse die in de zeventiende eeuw begon was niet alleen een gelukkige combinatie van wiskundige technieken en ideeën. De nieuwe wiskunde bood, zoals in de inleiding besproken ook een sleutel om een probleemgebied te ontsluiten dat zich tot ver buiten de wiskunde uitstrekte, namelijk dat van de *continue* (schokvrije) *veranderingsprocessen*. Belangrijke voorbeelden van zulke processen waren: beweging onder invloed van krachten (val, slingerbeweging, kogelbanen, planetenbanen), vorm van buigzame of elastische lichamen onder inwerking van krachten (hangende ketting, balk met gewicht er op), breking van lichtstralen in media met variabele brekingsindex, etc. Welke sleutel leverde de nieuwe analyse voor het begrip van deze processen?[7] Die sleutel was de *differentiaalvergelijking*. We hebben gezien hoe men met behulp van een differentiaalvergelijking raaklijnen aan een kromme kon bepalen. Kort nadat men voor het eerst deze differentiaalvergelijkingen had leren afleiden, bleken ze zich aan de wiskundigen op te dringen vanuit de nieuwe natuurwetenschap zoals die ontwikkeld werd door Galileo, Huygens, Newton, Leibniz en anderen. Hoe kwam dat? Dat kwam omdat deze wetenschappers bewegingsprocessen probeerden te begrijpen en daarbij het begrip *kracht* (zwaartekracht, gravitatiekracht, elastische kracht, centrifugale kracht, luchtweerstand etc.) centraal stelden. Op ieder moment van een bewegingsproces werken er krachten die de beweging van het object veranderen; de snelheid wordt wat groter of kleiner, en de richting wat meer naar links of naar rechts. En als we de krachten weten, kennen we op ieder moment de verandering van de beweging. Om daaruit de beweging zelf te bepalen moeten we als het ware al die momentane veranderingen aan elkaar rijgen om het totale verloop te voorspellen. De analyse maakte het mogelijk zo'n probleem in een formule uit te drukken, zodat er aan gerekend kon worden. We bezien als voorbeeld de *valbeweging*. Hierbij is de kracht de aantrekkingskracht van de aarde, die gelijk is aan $m \times g$, het product van de massa m van het lichaam en de gravitatieconstante g. Newtons wet zegt: kracht = massa × versnelling; versnelling is groei, dat wil zeggen verandering, van de snelheid, en dus

$$m \times g = m \times \frac{dv}{dt}$$

waarin dv de verandering is van de snelheid v gedurende een klein tijdsverloop dt. Die dt is het tijdsverloop in het 'moment' dat we bekijken. (Zeventiende-eeuwse wiskundigen zagen de dt en de dv als zeer klein of 'oneindig klein'; nu zeggen we dat we limieten bekijken onder de veronderstelling dat dt naar 0 nadert.) Hieruit willen we de relatie tussen de snelheid v en de tijd t afleiden. Als we de vorige vergelijking schrijven als

$gdt = dv$

(de massa m stond zowel links als rechts en kan dus weggelaten worden), zien we dat het een differentiaalvergelijking is zoals we die bij het 'blad van Descartes' hierboven hebben gezien, met v in de rol van y en t in de rol van x. Het enige verschil is dat we bij het blad van Descartes de bijbehorende vergelijking van de kromme (namelijk $x^3 + y^3 = axy$) kenden en daaruit de differentiaalvergelijking hadden afgeleid, terwijl we hier alleen de differentiaalvergelijking hebben. De vraag is dus: Van welke vergelijking tussen de variabelen v en t is $gdt = dv$ de differentiaalvergelijking? Als we die vergelijking en die kromme kennen, weten we dus voor het hele valproces het verband tussen snelheid en tijd. We hebben dan als het ware alle veranderingen van de snelheid in opeenvolgende momenten (die we kennen uit Newtons wet), aan elkaar geregen en zo het gehele valproces beschreven. In dit opzicht is de valbeweging karakteristiek voor de vele *continue veranderingsprocessen* die de nieuwe zeventiende-eeuwse wetenschap onderzocht: Wat de theorie (de wetten over het gedrag van de krachten, zoals de valwet) zegt over de beweging in het klein (over kleine afstanden, in kleine tijdspannes) wordt wiskundig vertaald in een differentiaalvergelijking. Om het globale proces te beschrijven moet men die differentiaalvergelijking oplossen, dat wil zeggen, de bijbehorende vergelijking (en daarmee de grafiek) bepalen. Met de differentiaalvergelijkingen leverde de nieuwe analyse van Newton en Leibniz dus de mogelijkheid problemen van continue verandering in wiskundige termen te vertalen. Ook leerde men vele differentiaalvergelijkingen op te lossen, ook de differentiaalvergelijking van de valbeweging, $dv = gdt$, die niet moeilijk is, de oplossing is $v = gt$, dat wil zeggen: de valsnelheid v groeit evenredig met de valtijd t. Tegen het eind van de zeventiende eeuw waren al heel wat ingewikkelder differentiaalvergelijkingen opgelost.

4.5 VERWACHTINGEN EN DROMEN

De ontwikkeling van de nieuwe 'analyses' – letteralgebra, analytische meetkunde, differentiaal- en integraalrekening en technieken voor het oplossen van differentiaalvergelijkingen – is dus van groot belang gebleken, niet alleen binnen de wiskunde, maar voor de gehele mathematische natuurwetenschap, en niet alleen voor de zeventiende eeuw, maar voor de gehele 'moderne' periode vanaf de Renaissance. Maar het latere belang van een historische gebeurtenis verklaart niet waarom die plaatsvond; de betrokkenen in de zeventiende eeuw wisten niet dat het zo zou aflopen. Daarom past aan het slot van dit hoofdstuk aandacht voor de vraag: Wat bracht deze wiskundigen ertoe zich voor de 'analyses' in te zetten? Wiskundigen werden (en worden), zoals algemeen geldt voor de ontwikkeling van het menselijk gedachtegoed, geleid enerzijds door de eigen traditie, door nieuwsgierigheid en fascinatie met het onderwerp en door directe vragen van buitenaf, en anderzijds door verwachtingen, hoop en dromen over de toekomst. Over de tradities waarop de zeventiende-eeuwse wiskunde voortbouwde, de spanning van de nieuwe theorieën, en de wiskundige vragen van de nieuwe natuurwetenschap hebben we het al gehad. Om iets meer van de toekomstgerichte drijfveren achter de ontwikkelingen te begrijpen gaan we nu op zoek naar de verwachtingen en de dromen die de wiskundigen inspireerden in hun zoeken naar nieuwe kennis en methoden. We vinden dan drie ideeën die belangrijke stimuli vormden voor wiskundig onderzoek gedurende de zeventiende eeuw; één over het wezen van de werkelijkheid, en twee over natuurwetenschap.

Wiskunde en werkelijkheid

Het eerste idee was:

> Achter de (natuur-)verschijnselen ligt een werkelijkheid die wiskundig van aard is; de wiskunde levert dus de sleutel om de wereld essentieel te begrijpen.

De oorsprong van dit idee lag in het oude Griekenland. De vroeg-Griekse wijsgeer Pythagoras (ca. 560-ca. 480 v. Chr.), en zijn volgelingen, de Pythagoreeërs, in de vierde eeuw voor Christus, meenden dat natuurverschijnselen begrepen konden worden door te zoeken naar de onderliggende getallen en de getalsverhoudingen. 'Alles is getal' was hun zinspreuk. Bij Plato (427-348/7 v. Chr.) vinden we naast getallen ook de meetkundige vormen, zoals de vijf 'Platonische' lichamen, als wiskundige werkelijkheid achter de natuurverschijnselen. Het idee werd in de Renaissance door velen opgenomen en ingepast in een Christelijke denkwereld: God had de schepping naar wiskundige principes gemaakt; wiskunde kon dus helpen in de natuur de 'voetsporen van de schepper' te herkennen, zoals Johannes

Kepler (1571-1630) het formuleerde. Kepler werkte bijvoorbeeld in die overtuiging ideeën uit over de structuur van het zonnestelsel gebaseerd op de afmetingsverhoudingen van de Platonische lichamen. Het idee is van groot belang geweest voor de ontwikkeling van wiskunde en natuurwetenschap, vooral waar wetenschappers zich lieten inspireren door esthetiek en harmonie in de natuurverschijnselen en daardoor ook eisen van schoonheid en passende vorm oplegden aan hun wiskundige theorieën over de natuur.

Wiskunde als taal der natuur

Het tweede idee was:

> Wiskunde is de taal waarin de natuurverschijnselen het best begrepen en beschreven kunnen worden.

Galileo sprak over het universum als een boek geschreven in wiskundige taal en toegankelijk alleen voor wie die taal kan lezen. Newton noemde zijn beroemde boek waarin hij de bewegingswetten formuleerde *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 'Wiskundige beginselen van de filosofie der natuur', en liet overtuigend zien hoe natuurwetten, weergegeven in wiskundige formulering, de basis leverden voor de door metingen controleerbare beschrijving van vele verschillende natuurprocessen. Het belang van dit idee is dat het, samen met de door de zeventiende-eeuwse analyse geschapen nieuwe wiskundige technieken, de vorm leverde die tot ver in de twintigste eeuw karakteristiek is gebleven voor mathematische natuurwetenschappen: natuurwetten geformuleerd als differentiaalvergelijkingen; natuurlijke processen beschreven als oplossingen van die differentiaalvergelijkingen; controle van deze wetten en beschrijvingen door experimenten waarin de natuurlijke processen worden doorgemeten.

Wiskunde en wetenschappelijk denken

Het derde idee was:

> Effectief menselijk denken is wiskundig, in het bijzonder logisch en algoritmisch; er moet daarom een soort symbolische denk-algebra ontwikkeld worden waarmee wetenschappelijke vragen door het toepassen van rekenregels beantwoord kunnen worden.

Omstreeks 1600 vinden we bij een aantal wiskundigen het idee van een 'mathesis universalis', een 'universele wiskunde', die zou gelden voor alle situaties waarin kwantiteiten in onderling verband staan. Het idee was ingegeven door de nieuwe algebra en voor de jonge Descartes, bijvoorbeeld, was het een belangrijke inspiratie. Bij Leibniz treffen we een verdergaande vorm van het idee aan, nu geïnspireerd op de differentiaal- en integraalrekening, en op combinatoriek en logica. Hij stelde zich een 'characteristica generalis', een 'algemene symbooltaal', voor waarin alle begrippen van filosofie en wetenschap opgenomen konden worden in een soort algebra van het denken, zodat het oplossen van problemen en het begrijpen van processen teruggebracht kon worden tot overzichtelijk geformuleerde en met een symbolische algebra oplosbare problemen. Het idee vormde een belangrijke inspiratie bij de ontwikkeling van de symbolische logica. En meer in het algemeen stimuleerde het idee de mathematisering van wetenschappen in de negentiende en twintigste eeuw.

De drie genoemde ideeën overlapten elkaar gedeeltelijk, er waren extreme en meer gematigde varianten, en er was natuurlijk verschil van mening. De werking van de ideeën was dus diffuus en minder expliciet dan de drie formuleringen hierboven misschien suggereren – vandaar ook dat ik het woord 'dromen' heb gebruikt. Maar voor grootschalige historische ontwikkelingen, zoals de opkomst van de analyse en de rol ervan in de mathematische natuurwetenschappen, spelen ook verwachtingen, visies en dromen een rol en het is een van de uitdagingen van de geschiedschrijving om die in kaart te brengen.

NOTEN

1. Elders (Bos, 1993) verdedig ik de stelling dat er na de zeventiende eeuw eigenlijk maar twee andere qua belang en omvang vergelijkbare, door geavanceerde wiskunde mogelijk gemaakte ontsluitingen zijn geweest, namelijk van de probleemgebieden *zekerheid en onzekerheid* en *grootschalige ordening*. Het eerste betreft problemen waarbij de optredende oorzaken, krachten, en effecten niet eenduidig te identificeren zijn waardoor de data essentieel behept zijn met onzekerheden. Het gebied is in de decennia rond 1900 ontsloten door een combinatie van eerder ontwikkelde statistische technieken en de mathematische waarschijnlijkheidsrekening. Daarmee ontstond de mathematische statistiek die begrippen

(correlatie bijvoorbeeld) en technieken (steekproeven, factoranalyse) ontwikkelde voor het begrijpen en beheersen van situaties waarin onzekerheid een niet te vermijden element vormt. Met *grootschalige ordening* bedoel ik het probleemgebied dat, sinds de Tweede Wereldoorlog, ontsloten is door de wiskundige en technische ontwerpers van computers en computerprogrammatuur.

2. Namelijk (met de klok mee vanaf links-boven): *2 Koningen* 20, 8-11, de schaduw op de zonnewijzer van Achaz; *Josua* 10 12-13, ‘Zon, sta stil boven Gibeon, maan, blijf staan boven de vlakte van Ajjalon’; *Genesis* 9, 12-13, de regenboog als het teken van Gods verbond met Noachs nageslacht; *Matteüs* 2, 1-13, de ster van Bethlehem en de magiërs uit het Oosten. Voor de betekenis van deze vignetten in hun context, zie Remmert (2003), het *Josua* citaat komt uit de Nieuwe Bijbelvertaling van het Nederlands Bijbelgenootschap.
3. Dit is dus het wiskundige oneindig dat optreedt bij variabele grootheden. Er is ook een ander wiskundig oneindigheidsbegrip dat minder met de differentiaal- en integraalrekening te maken heeft en dat pas in de negentiende eeuw in een sluitende wiskundige theorie beschreven werd. Dit is het oneindig dat bedoeld wordt als men zegt dat de rij 1, 2, 3, . . . uit ‘oneindig veel’ getallen bestaat.
4. Descartes bestudeerde zelf alleen het bladvormige gedeelte van de kromme; de andere delen hebben namelijk negatieve x- of y-coördinaten.
5. De wiskunde in de paragraaf Differentiaal- en integraalrekening zal een aantal lezers minder vertrouwd voorkomen, onder meer omdat de zeventiende-eeuwse benadering essentieel verschilde van de tegenwoordig gebruikelijke presentatie van de differentiaal- en integraalrekening. Nadere uitleg zou hier echter te ver voeren en ik hoop dat lezers bereid zijn de formules en de technische termen zo nodig als impressionistische aanduidingen te accepteren.
6. Ik geef de resultaten hier in de notatie die Leibniz ontwikkelde; Newton gebruikte andere symbolen.
7. Voor de rest van paragraaf 4.4 geldt de opmerking in noot 5.

LITERATUUR

Andersen, Kirsti, Bos, Henk J. M. ‘Pure mathematics’. In *The Cambridge History of Science*, Vol. 3, *Early Modern Science*, Katharine Park & Lorraine Daston, eds, Cambridge University Press, 2006, Ch. 28, pp. 697-725.

Bos, Henk J.M. “Queen and Servant”: the role of mathematics in the development of the sciences'. In *Lectures in history of mathematics*. Providence, American Mathematical Society, 1993, hoofdstuk 10, pp. 165-180.

Grootendorst, A.W., ed. *Vakantiecursus 1989: Wiskunde in de Gouden Eeuw*, (CWI Syllabus 25). Amsterdam, CWI, 1989.

Katz, Victor J. *A history of mathematics; an introduction*, (2e ed.). New York etc., Addison-Wesley, 1998.

Kline, Morris. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York, Oxford University Press, 1972.

Mahoney, Michael S. 'The mathematical realm of nature'. In *The Cambridge History of Seventeenth-Century Philosophy* (D. Garber e.a. eds). Cambridge, Cambridge University Press, vol. 1, 1998, pp. 702-755.

Remmert, Volker R. 'Die Einheit von Theologie und Astronomie: Zur visuellen Auseinandersetzungen mit dem Kopernikanischen System bei Jesuitischen Autoren in der ersten Hälfte des 17. Jahrhunderts', *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 72, 2003, pp. 247-295.

Struik, Dirk J. *Geschiedenis van de wiskunde*. Amsterdam, SUA, 1980.

5
Sprongen in het diepe en passen op de plaats – wiskunde in de achttiende eeuw

Jan van Maanen

5.1 INLEIDING

De wiskunde had in de zeventiende eeuw, zoals uit het vorige hoofdstuk bleek, een serie grote doorbraken meegemaakt. Descartes' programma om de algebra te gebruiken als onderzoeksmethode in de meetkunde, leverde zowel directe meetkundige resultaten op als de voedingsbodem voor onderzoekingen op andere gebieden. De belangrijkste was de studie van oneindige processen, die aan het einde van de eeuw vorm kreeg in de differentiaal- en integraalrekening van Newton en Leibniz. Ook Huygens baseerde zijn baanbrekende pagina's over kansrekening op de algebraïsche methode van Descartes. De inspiratie kwam van vele kanten: de studie en uitgaven van de klassieken, nieuwe technologie zoals de telescoop en het slingeruurwerk, maatschappelijke vragen in verband met grote reizen, oorlogvoering, architectuur, en nieuwe opvattingen binnen andere disciplines, met name de wiskundige modellering van de natuurkunde door Galilei en de generaties na hem. Veel van de wetenschappers waren financieel onafhankelijk of ze deden hun onderzoekingen naast een andere functie. In de loop van de eeuw ontstonden daarnaast de wetenschappelijke academies, die onderzoek stimuleerden.

Ook in de achttiende eeuw kende de wiskunde grote vooruitgang. De professionele onderzoeker in dienst van de academie beheerste meer en meer de literatuur. Wetenschappelijke tijdschriften, waarvan er sinds 1660 enkele opgericht waren, meestal ook door een academie, speelden daarbinnen een steeds belangrijker rol. De doorbraken uit de zeventiende eeuw werden systematisch uitgewerkt en op vele nieuwe terreinen toegepast. Astronomie en fysica zorgden weer voor nieuwe problemen, waarop wiskundigen als Bernoulli (vader en zoon), Euler en Laplace hun nieuwe methoden konden uittesten. Ook in filosofische discussies mengden wiskundigen zich. Daniel Bernoulli en Leonhard Euler representeren in het navolgende de Wiskunde en Filosofie met hoofdletters.

Als we naar het aantal beoefenaren van al dit Nieuws kijken, dan blijkt het om een betrekkelijk kleine groep te gaan. In Nederland was deze aan het begin van de achttiende eeuw nauwelijks vertegenwoordigd. Hier waren het de landmeters, schoolmeesters en zeevaartkundigen die de wiskundige traditie in ere hielden, onder wie de in dit hoofdstuk optredende Zwolse landmeter Johannes Morgenster. De meeste van hen zijn in encyclopedieën onvermeld gebleven, maar zonder een blik in hun richting zouden we een scheef beeld hebben.

5.2 WELKE BLIK?

Een breed onderwerp als 'de wiskunde in de achttiende eeuw' dwingt de beschouwer tot nadenken over de vraag hoe men dit onderwerp moet benaderen. Ofwel: 'Waarop en hoe stel ik mijn ogen scherp? Met welke blik ga ik te werk?' Voordat ik aan de eigenlijke beschouwing begin, wil ik eerst duidelijk maken hoe ik ga kijken. Bepaalde zaken komen scherp in beeld, terwijl we over of langs andere dingen heen zullen kijken.

In de eerste plaats zal ik niet meegaan in de gewoonte om de wiskunde alleen te zien als datgene wat voortgebracht is door de genieën. Die krijgen hun beurt, en een beschouwing over dit onderwerp waarin bijvoorbeeld de naam Euler niet zou vallen, mag niet de ondertitel 'wiskunde in de achttiende eeuw' hebben. Maar er was in de achttiende eeuw veel meer wiskundige activiteit op andere niveaus dan dat van Euler. Er waren nieuwe ontwikkelingen die niet voor de eeuwigheid bewaard zijn gebleven. Maar er is nog een activiteit waarover je relatief weinig hoort, die wel aandacht verdient en hier ook zal krijgen. Dat is de wiskunde van de praktijkmensen, zeg maar de landmeters en zeevaarders. Deze wiskunde staat in een lange traditie, die wat de meetkunde betreft tot de Griekse oudheid teruggaat en die in de achttiende eeuw door talrijke beoefenaren in stand gehouden werd. Zie hier de eerste keuze: we gaan twee stromen beschouwen, de Grote Wiskunde met hoofdletters, en de wiskunde in de handen van de praktijkmensen.

Bij de Grote Wiskunde loop je sterk het risico een droge opsomming van feiten te krijgen. Bovendien heeft de achttiende eeuw zoveel voortgebracht wat in die opsomming zou thuishoren, dat je over veel dingen zeer oppervlakkig zou moeten zijn. Liever niet dus. Encyclopedieën en overzichten zijn er voldoende. In dit hoofdstuk zal ik de zaken uit de Grote Wiskunde belichten die samenhangen met één persoon, en wel Daniel Bernoulli. Bernoulli – ook al is er een hele dynastie van wetenschappers met de naam Bernoulli, onder wie de vader en de oom van Daniel, zal ik met Bernoulli zonder voornaam steeds Daniel bedoelen – was op vele terreinen actief, ook in de natuurkunde. Hij behoorde tot de wiskundige 'subtop'. Hij had veel contacten. Via hem zullen we kennis maken met diverse wiskundigen en hun werk, en ook zien hoe het wiskundige werk georganiseerd was. De vraag is natuurlijk in hoeverre deze blik iets zal opleveren dat ook maar in enige mate representatief is voor de wiskunde van de achttiende eeuw. Aan het eind zal een afweging worden gemaakt.

5.3 DE GROTE WISKUNDE WEERSPIEGELD IN HET WERK VAN DANIEL BERNOULLI

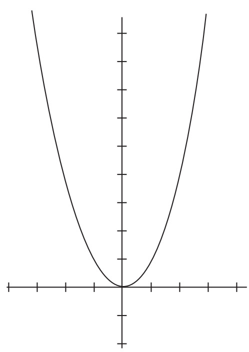
Leerboeken en leermeesters

De geboorte van Daniel Bernoulli, in 1700 in Groningen, viel min of meer samen met het ontstaan van een van de belangrijkste deelgebieden van de hedendaagse wiskunde: de differentiaal- en integraalrekening. Dat samenvallen moet niet alleen chronologisch opgevat worden maar ook geografisch, want Daniels vader Johann Bernoulli heeft tijdens zijn professoraat in Groningen (1695-1705) belangrijke bijdragen aan de vroegste ontwikkeling van deze theorie geleverd. Ook werkte Johann, al voordat hij naar Groningen kwam, aan een logische fundering van de theorie en hij schreef de eerste samenhangende leertekst. Aan de hand van deze tekst, waarvan een afschrift bewaard gebleven is, onderwees Johann Bernoulli de Franse markies De l'Hospital in de differentiaal- en integraalrekening. L'Hospital publiceerde enkele jaren later, in 1696, het eerste leerboek over het onderwerp. De titel geeft aan wat de thematiek is: *Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes*. Ik sta hier even bij stil omdat de analyse, zoals het vakgebied is gaan heten, fundamenteel is geworden in de achttiende eeuw en ook in het werk van Bernoulli. Het draait om het 'begrijpen van kromme lijnen'. Krommen stonden in de belangstelling sinds de Oudheid. De kegelsneden bijvoorbeeld, maar ook een menagerie van speciale krommen die voor hetzelfde geld prehistorische beesten zouden kunnen zijn, zoals de quadratrix, de cissoïde en meer van dat moois.

Dankzij Descartes was het onderzoek van krommen in een stroomversnelling geraakt. Descartes stelde voor om in het vlak coördinaten ten opzichte van een x- en y-as in te voeren, en hij kwam tot de conclusie dat alle punten (x,y) die voldoen aan één vergelijking met twee onbekenden in het x,y vlak, een kromme voorstellen. Een hedendaags voorbeeld: de vergelijking $y = x^2$ heeft oneindig veel oplossingen, waarvan de tabel er een aantal geeft:

x	-3	3	-2	2	-1	1	0
y	9	9	4	4	1	1	0

De tabel is zo geordend dat je er een aantal dingen aan kunt zien:
– voor $x = 0$ is de y het kleinst
– voor $x = -3$ en $x = 3$ is de y even groot, zo ook voor -2 en 2 en voor –1 en 1
– als je met x van 0 weggaat, neemt y eerst een beetje toe, maar dan gaat y steeds sterker en sterker groeien



Figuur 5.1: De parabool $y = x^2$

Als we Descartes volgen en alle oplossingen in het vlak tekenen, dan kunnen we dit nog veel beter zien.

De oplossingen (x, y) leveren met elkaar een kromme, in dit geval een parabool (zie figuur 5.1). De waarnemingen die we al in de tabel deden, zijn hier nog veel scherper te doen.

Een volgende grote stap na Descartes maakte Leibniz in 1684 met de introductie van de differentiaalrekening. Leibniz presenteerde, zoals hij het zelf noemde, 'een nieuwe methode voor maxima en minima, en ook voor raaklijnen'. Een kromme kan bij Leibniz de grafische weergave van een proces zijn. Meteen in 1684 paste hij deze opvatting toe, door de grafische voorstelling te bestuderen van de tijd die een lichtstraal nodig heeft om de weg af te leggen tussen twee punten in verschillende media, via een nog te kiezen tussenpunt. De plaats van dat tussenpunt noemt hij x en de bijbehorende reistijd is y. De grafiek laat zien dat de reistijd voor een zekere x minimaal is, en het is Leibniz erom te doen deze x te berekenen. Hij doet dat met een nieuwe methode: de differentiaalrekening. Deze nieuwe methode werkt l'Hospital in 1696 in zijn leerboek verder uit. De nieuwe methode wordt door l'Hospital in de titel van het boek *Analyse des infiniment petits* gedoopt, en de ondertitel *Pour l'intelligence des lignes courbes*, ofwel: 'om de krommen te begrijpen' zal nu ook duidelijk zijn. Analyse heeft tot doel krommen te bestuderen, en als een kromme de grafische weergave is van een of ander proces, dan levert deze bestudering gegevens op over dat proces. Het kan erom gaan de snelheid te bepalen waarmee het proces zich ontwikkelt, of om de optimale toestand van het proces. Daarvoor zoek je naar een maximale (of als het bijvoorbeeld om kosten gaat de minimale) waarde van y, en deze manifesteert zich in de grafiek als een bergtop (of een dal, zoals in figuur 5.1, als het om een minimum gaat).

In dezelfde periode stonden meer onderwerpen in de belangstelling en er verschenen meer leerboeken. De waarschijnlijkheidsrekening bijvoorbeeld, maakte een ontwikkeling door die vergelijkbaar was met de analyse. In 1657 verscheen de eerste publicatie, de *Rekeningh in Speelen van Gheluck* van Christiaan Huygens (om precies te zijn: in 1657 verscheen de Latijnse vertaling, onder de titel *De ratiociniis in ludo aleae*, het Nederlandse origineel verscheen in 1660). Huygens had zich laten inspireren door een discussie in brieven tussen Pascal en Fermat over de vraag hoe de inzet in een kansspel verdeeld moet worden als het spel voortijdig afgebroken wordt. Verder had hij er een theorie aan toegevoegd over de uitkomsten van het dobbelspel. Het was zijn bedoeling om voor de kansrekening te doen wat Descartes voor de meetkunde gedaan had: algebra in te schakelen als oplossingsmethode.

Huygens' geschriftje (14 pagina's, waarop 14 uitgewerkte en vijf open problemen te vinden zijn) vormde het uitgangspunt voor de studies over kansrekening van Jakob Bernoulli, de oudere broer van Daniels vader. Bij zijn dood in 1705 liet Jakob Bernoulli een manuscript na, dat in 1713 door Daniels neef Nicolaus werd uitgegeven onder de titel *Ars coniectandi*: 'De kunst van het gissen' (of nog beter: 'Giskunde'). Dit boek werd het standaardleerboek over kansrekening in de eerste helft van de achttiende eeuw, zoals de *Analyse des infiniment petits* van l'Hospital dat was voor de differentiaalrekening.

Daniel Bernoulli kreeg in Basel over de differentiaal- en integraalrekening onderwijs van zijn vader Johann, lessen waaraan ook Leonhard Euler deelnam. Euler, een van de grootste wiskundigen uit de achttiende eeuw – zo niet de grootste – was zeven jaar jonger dan Daniel. Hij dankt zijn terechte bekendheid aan een ongewone combinatie van productiviteit, originaliteit en diepgang. Zijn thematiek, die loopt van theoretische tot toegepaste wiskunde en die zich ook tot astronomie en natuurkunde uitstrekt, was zeer breed. Behalve honderden artikelen in onderzoekstijdschriften schreef Euler een indrukwekkende serie leerboeken en monografieën. Die worden nog steeds zo belangrijk gevonden, dat ze in de laatste honderd jaar in moderne vertalingen opnieuw worden uitgegeven (dat geldt onder meer voor de algebra en de infinitesimaalrekening). De invloed van de leerboeken is te herkennen aan het feit dat veel van de nieuwe wiskundige notaties die Euler invoerde nog steeds de standaard zijn en dat verschillende wiskundige begrippen naar Euler genoemd zijn. Dit laatste argument moet overigens met een korrel zout genomen worden, omdat er in de wiskunde ook allerlei begrippen en stellingen zijn die onjuist vernoemd zijn. 'Lees Euler, lees Euler, hij is in alle opzichten onze meester!' Zo verwoordde Laplace zijn achting voor Euler, en wie Eulers spirit bij het oplossen van problemen en het uiteenzetten van nieuwe ideeën ervaren heeft, zal dit beamen. Krachtig en prachtig, andere woorden zijn er niet voor.

Daniel Bernoulli verliest de vergelijking met Euler in vele opzichten. Hij publiceerde minder en over een kleiner aantal onderwerpen. Hij schreef maar één overzichtswerk. Toch speelde hij bij diverse belangrijke ontwikkelingen een rol en nieuwsgierigheid en spirit kenmerken ook zijn werk.

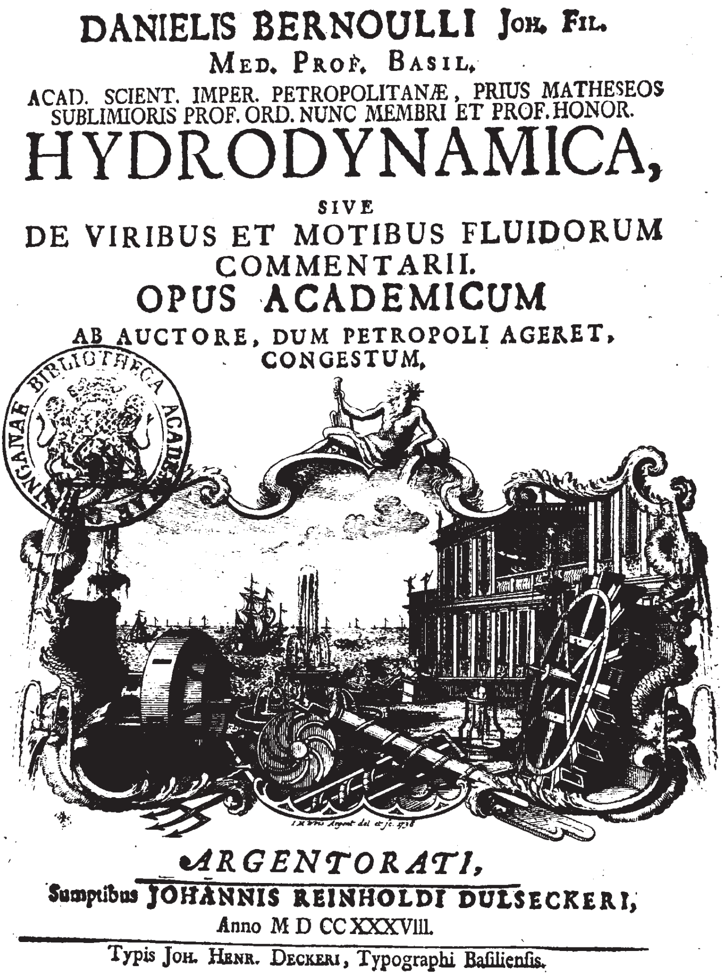
5.4 BELANGRIJKE ONTWIKKELINGEN

De Hydrodynamica

Nu enkele sprongen in het diepe aan de hand van Daniel Bernoulli. Een gebied dat Bernoulli zelf ontgonnen heeft en waarmee hij zijn naam definitief gevestigd heeft, is de hydrodynamica. Het woord hydrodynamica is afkomstig van de titelpagina van Bernoulli's *magnum opus* over dit onderwerp (zie figuur 5.2).

Het boek werd in 1738 in Straatsburg uitgegeven, na een drukproces van enkele jaren. Op deze titelpagina staat meer dan je op het eerste gezicht zou denken. In de eerste plaats zien we de naam van onze hoofdpersoon: Daniel Bernoulli. Feitelijk staat er 'Van Daniel Bernoulli', namelijk: de *Hydrodynamica* van Daniel Bernoulli. Meteen voegt hij toe: 'Joh. Fil.', ofwel *Johannis Filii*: de zoon van Johann. De titelpagina gaat verder: 'Professor in de Geneeskunde te Basel'. Inderdaad was Daniel sinds 1732 hoogleraar in de anatomie en plantkunde in Basel, de plaats waar de stamvader van het geslacht Bernoulli zich een eeuw eerder had gevestigd en waar ook Daniels vader Johann in 1667 geboren was. Basel was ook de plaats waar Daniel vanaf zijn vijfde opgroeide en waar hij studeerde. Tot zijn vijfde woonde Daniel in Groningen. Daarna volgde zijn eerste grote reis; in een maand van Groningen via Leeuwarden, Harlingen, Enkhuizen, Amsterdam, Utrecht, Keulen en Frankfurt naar de grootouders in Basel.

Net zo min als de eerste reis is de tweede grote reis op de titelpagina terug te vinden. Daniel studeerde medicijnen en wiskunde (een brede bèta, dus) in Basel, Heidelberg en Straatsburg. Toen hij na zijn artsexamen in 1720 tot tweemaal toe in Basel werd afgewezen voor een professoraat, besloot hij eerst de klassieke 'grand tour' naar Italië te maken. De bedoeling was dat hij zich in Venetië verder in de medicijnen zou bekwamen, maar hij deed liever wiskunde. In Venetië verscheen in 1724 zijn eerste wiskundige publicatie. Het jaar daarop won hij zijn eerste grote wetenschappelijke prijs, van de Parijse *Académie des Sciences*. Het leverde hem het aanbod op van een baan in Sint Petersburg, vergelijkbaar met de postdoc*s* aan het begin van de eenentwintigste eeuw.



DANIELIS BERNOULLI JOH. FIL.
MED. PROF. BASIL.
ACAD. SCIENT. IMPER. PETROPOLITANÆ, PRIUS MATHESEOS SUBLIMIORIS PROF. ORD. NUNC MEMBRI ET PROF. HONOR.
HYDRODYNAMICA,
SIVE
DE VIRIBUS ET MOTIBUS FLUIDORUM COMMENTARII.
OPUS ACADEMICUM
AB AUCTORE, DUM PETROPOLI AGERET, CONGESTUM.

ARGENTORATI,
Sumptibus JOHANNIS REINHOLDI DULSECKERI,
Anno M D CCXXXVIII.
Typis JOH. HENR. DECKERI, Typographi Basiliensis.

Figuur 5.2: Titelpagina van Bernoulli's *Hydrodynamica* (1738).

En zie, dan gaat het Curriculum Vitae op de titelpagina weer verder. Bernoulli had zich reeds als 'medisch hoogleraar te Basel' gepresenteerd, maar hij voegt er aan toe: 'Voorheen gewoon hoogleraar in de hogere wiskunde aan de keizerlijke Academie van Wetenschappen te Petersburg, nu lid van deze academie en honorair hoogleraar'. 'Dit is niet zomaar iemand', hoort (en hoorde destijds) de lezer te denken. Deze man heeft onderzoekservaring opgedaan in het buitenland, hij heeft een netwerk. Daniel werkte van 1725 tot 1733 in Sint Petersburg. In 1727 haalde hij ook zijn stad en studiegenoot Leonhard Euler naar Petersburg, hetgeen tot een vruchtbare samenwerking leidde.

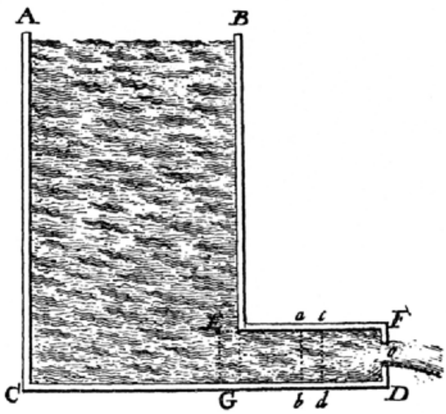
Wat zegt Daniel op de titelpagina over de *Hydrodynamica*? Het zijn 'Notities over de krachten en bewegingen van vloeistoffen'. *Opus Academicum*, voegt hij eraan toe: 'dit is een Wetenschappelijke Publicatie'. Men moet dit volgens Bernoulli niet zien als een tussendoortje, een vakpublicatie. Dit is wel degelijk wetenschappelijk werk. En verder schrijft hij: dit werk is 'samengesteld door de auteur, toen hij nog in Petersburg werkte'. Er staat niet *viveret*: 'woonde', of 'verbleef'. Nee, er staat *ageret*, van hetzelfde werkwoord waarvan ons woord 'actief' afkomstig is. Voorwaar, geen *lowprofile* CV: dit is iemand om rekening mee te houden.

Dan volgt een artistieke impressie van het verzette werk aan de *Hydrodynamica* in Petersburg. De kunstenaar, Weis uit Straatsburg, heeft duidelijk niet de Rijn afgebeeld, dus we moeten vaststellen dat hij zich door krachten en bewegingen van vloeistoffen en de plaatsnaam Petersburg heeft laten inspireren. Zee op de achtergrond, een soort hermitage rechts in beeld en overvloedige vloeistofsymbolen: een turbine, een waterrad, een archimedische schroef, waterspuwende vissen, een fontein, en de drietand van Neptunus. Neptunus zelf troont boven het geheel en wellicht was er nog een schone waternimf, maar daar heeft een bibliothecaris zijn stempel op achtergelaten. Om de titelpagina nog even af te maken: Dulsecker in Straatsburg nam het financiële risico, maar het boek werd gedrukt in Basel en kwam uit in 1738.

Meer toegepaste wiskunde

Verschillende aspecten van het werk van Daniel Bernoulli zijn karakteristiek voor de ontwikkelingen van de wiskunde in de achttiende eeuw. In de eerste plaats zien we dat hij met wiskundige middelen een niet-wiskundige thematiek behandelt. Bernoulli was niet de eerste die dat deed, want je vindt deze aanpak in de Oudheid al bij Archimedes en in de zeventiende eeuw bij universele wetenschappers als Galilei en Newton. Bij hen was er geen scheiding tussen bijvoorbeeld natuurkunde en wiskunde. Nieuw in de achttiende eeuw is dat er nieuwe wiskundige methoden beschikbaar waren gekomen – grafische representaties, differentiëren en integreren – die bij uitstek geschikt waren om veranderingsprocessen te bestuderen.

Zo vertaalt Bernoulli in de *Hydrodynamica* de vraag om de druk te berekenen op de wand van de uitlaat uit een zeer groot en altijd vol vat (zie figuur 5.3) in een differentiaalvergelijking, die hij vervolgens oplost. Dit is een nieuwe techniek, waarmee Leibniz, (oom) Jakob en Johann Bernoulli rond 1700 begonnen. Deze techniek stelt de wiskundige in staat het gedrag van een bepaalde grootheid die van de tijd afhangt (bijvoorbeeld de weg $s(t)$ die een deeltje aflegt), af te leiden uit gegevens over het verband tussen de tijd, de afgelegde weg en de snelheid waarmee die weg afgelegd wordt. Wiskundig gezien heeft dat verband de vorm van een vergelijking waarin t, $s(t)$ en de afgeleide $s'(t)$ voorkomen: een differentiaalvergelijking. De bedoeling was om uit die vergelijking het functievoorschrift van s uit te rekenen. Vanaf het begin van de eeuw slaagde men erin dit uit te rekenen voor steeds ingewikkelder vergelijkingen.



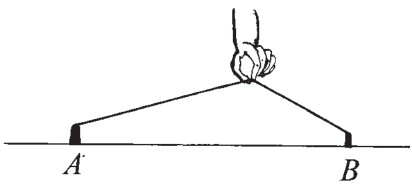
Figuur 5.3: De druk op de wand van de uitlaat wordt gevraagd; *Hydrodynamica* (1738).

Deze methoden werden toegepast en verder uitgewerkt voor een veelheid aan problemen; naast vloeistofstroming betroffen die ook warmte, geluid, elasticiteit, mechanica en hemelmechanica in het bijzonder, en de werking van apparaten waaronder het menselijk lichaam. Bernoulli modelleerde de werking van spieren en berekende de arbeid verricht door het menselijk hart. Hij modelleerde de beweging van moleculen in een gas en kwam zo tot een eerste kinetische gastheorie. Naar aanleiding van een prijsvraag analyseerde hij de invloed van trillingen op de voortbeweging van schepen.

De trillende snaar

Een beroemd strijdpunt waarbij Bernoulli betrokken was met d'Alembert en Euler, was de vraag hoe een trillende snaar wiskundig kan worden beschreven. Het nieuwe van het probleem, dat in 1713 door Taylor voor het eerst bekeken was, was dat er twee variabelen in voorkomen. De snaar AB heeft een lengte, zeg $AB = 60$cm. Dan is de uitwijking op 10cm van A waarschijnlijk anders dan op 15cm van A. De uitwijking hangt dus van de afstand x tot het bevestigingspunt A af. Maar de uitwijking van de snaar op $x = 10$ verandert elk moment. De uitwijking y is dus een functie van x en van t.

In 1747 vond d'Alembert via een zogenaamde partiële differentiaalvergelijking (partieel wil hierin zeggen dat er gedifferentieerd wordt naar meer dan één variabele) een oplossing. Een jaar later ging Euler daar tegenin. Hij vond dat d'Alembert zijn oplossing in een te kleine verzameling van functies zocht en kwam met een ander voorstel. Euler vond dat ook functies toegelaten moesten worden die een sprong maken. Dat is nodig als de snaar aan het trillen wordt gebracht door hem te 'plukken'. Dan ziet de begintoestand eruit zoals in figuur 5.4, en in dat geval maakt de afgeleide functie (bij differentiëren naar x) van de begintoestand een sprong.



Figuur 5.4: De begintoestand van snaar *AB*.

De kemphanen vochten jaren verder, tot in 1753 Daniel Bernoulli een ander gezichtspunt koos en een wezenlijk nieuwe oplossing voorstelde. Hij besloot om de fysische ervaring met snaren mee te laten wegen. Snaren hebben boventonen en de trilling van een snaar kan ontleed worden in een veelheid van trillingen. Hij vond dat d'Alembert en

Euler daar ten onrechte niet over spraken. De boventonen zijn met behulp van sinus- en cosinusfuncties te modelleren, en Bernoulli vond dat een goed gekozen optelling van deze functies (met als fysische inspiratie: de waargenomen combinatie van gelijktijdig klinkende boventonen) inderdaad de snaarvorm kon weergeven. Met een oneindige combinatie van steeds zwakker wordende boventonen kon hij zelfs een begintoestand modelleren waarin een knik zit zoals in figuur 5.4.[1]

In de negentiende eeuw werd Bernoulli's benadering de standaard. Ze werd onder de naam Fourier-theorie een klassiek ingrediënt van de mathematische fysica. Namen die ook thuishoren in het rijtje Bernoulli, d'Alembert en Euler zijn Lagrange (1736-1813) en Laplace (1749-1827), beide opkomend aan het eind van de eeuw, (vader) Johann Bernoulli (1667-1748), actief in de eerste helft van de eeuw, en Clairaut en Monge die zeer meetkundig georiënteerd waren.

Kansrekening en statistiek

Een ander terrein waaraan Bernoulli bijdragen leverde, zowel theoretisch als praktisch, was de kansrekening en statistiek. Hij toonde met de beroemde 'Petersburger paradox' aan dat de klassieke definitie van verwachtingswaarde, zoals Huygens en Jakob Bernoulli die hanteerden, bij potentieel oneindig durende spelen niet voldeed. Bernoulli bood met het begrip morele verwachting een bruikbaar maar nog steeds discutabel alternatief (Dehling e.a. 2003). Ook studies over de verdeling van meetfouten en een wiskundig model voor pokkenbesmetting en het effect van vaccinatie getuigen van zijn belangstelling voor excentrische onderwerpen die hij met vaak nieuwe, eigen methoden analyseerde.

Waar de Grote Wiskunde zich afspeelde, was Bernoulli in beeld. Maar zijn bijdragen waren – op de *Hydrodynamica* na – beperkt van omvang en lagen net buiten de hoofdstroom van het onderzoek. De schaduw van Euler, daarin ging hij de geschiedenis in.

5.5 DE WISKUNDIGE FILOSOFEN

De achttiende eeuw heet wel de 'filosofische eeuw' en wiskundigen roerden zich op allerlei manieren in het filosofische debat. Nieuw was dat niet, want denkers en wetenschappers als Aristoteles, Oresme, Descartes, Pascal, Leibniz en Newton hadden zich in eerdere eeuwen ook op het raakvlak van wiskunde en filosofie bewogen. Nieuw was wel de schaal waarop in de eeuw van de Verlichting deze interactie plaats had.

De toename in schaal had een serie oorzaken. Er stonden uit eerdere perioden nog een aantal prangende vragen open, met name de door Descartes aangedragen vraag over de verhouding van lichaam en geest. Verder waren er door de nieuwe wiskundige thematiek van bijvoorbeeld de differentiaal- en integraalrekening grondslagenvragen bijgekomen. Want een stevig fundament hadden de differentiaal- en integraalrekening na de vroegste publicaties van Leibniz en l'Hospital (1684, 1696) niet echt. Ze bedienden zich van oneindig kleine getallen die soms nul waren, maar als er door gedeeld moest worden, waren ze opeens niet nul. Dat was volgens de critici nogal tegenstrijdig. Nieuwentijt en Berkeley joegen de discussie over deze vragen aan.

Daar kwam een sociale factor bij, namelijk dat de wetenschap in steeds sterkere mate georganiseerd was. Sinds de tweede helft van de zeventiende eeuw stimuleerden de Academies van Londen en Parijs nieuw onderzoek. De Academie van Parijs beloonde de winnaars van haar prijsvragen met stevige geldprijzen. En via hun tijdschriften bevorderden de academies tevens de communicatie over nieuwe resultaten. In 1700 en 1725 kwamen daar de vermogende Academies van Berlijn en Petersburg bij. De georganiseerde vraag naar filosofische stellingname, bijvoorbeeld via de vierjaarlijkse filosofische prijsvraag van de Berlijnse Academie, resulteerde in grootschalige discussies en in talrijke filosofische publicaties. In het midden van de eeuw sloot een commercieel project als de *Encyclopédie* van Diderot, voor de wiskundige aspecten ondersteund door d'Alembert, bij deze trend aan. De reikwijdte van de artikelen ging uit boven de 'sciences, arts et métiers' uit de complete titel van de Encyclopédie en omvatte ook de rationalistische, liberaal filosofische en politieke stellingname van Diderot.

Ten slotte raakte de filosofische thematiek bij velen een gevoelige snaar, omdat de standpunten directe religieuze consequenties hadden. Voor iemand als Euler was dit een drijfveer om zich met felheid in het debat te mengen.

Een treffende weerspiegeling van de filosofische thematiek rond 1750 is te vinden in de 'Brieven over de voornaamste onderwerpen der natuurkunde en wysbegeerte', die Euler van 1760 tot 1762 schreef aan Frederike, de gevorderde tienerdochter van zijn vriend de Markgraaf van Brandenburg-Schwedt. De brieven, die sinds de Franse editie van 1768 in vele talen en uitgaven herdrukt werden, staan bekend als de ‘Brieven aan een Duitse prinses’. In het Nederlands verscheen in 1785-1786 al een uitgave in drie delen (‘volgens de laatste Hoogduitsche en Fransche uitgave vertaald’). De brieven combineren rechtstreekse natuurkunde (mechanica, optica, elektriciteit en magnetisme, kosmologie) met filosofie (logica, ethiek, kennistheorie) en theologie.

In de filosofie besprak en bestreed Euler de monadenleer van Leibniz en Wolff. Leibniz had monaden ingevoerd als de kleinste zelfstandige bezielde eenheden, die in samenhang met elkaar de geordende wereld vormen. Euler verzette zich, aan het eind van brief 76 met de woorden:

> want terwyl ik schryve, zoo verbeelt myn ziel zig geduuriglyk andere voorwerpen, en deze veranderingen zyn gegrond in myn ziel zelvs; geenzins daar buiten. Ik ben daar van verzeekerd, en ik ben meester van myne gedagten, in plaats dat de veranderingen, die ‘er in een lighaam gebeuren, de uitwerking zyn van een vreemde kragt. Laat U.H. ‘er nog byvoegen het oneindig onderscheid dat ‘er is tusschen den staat van een lighaam, dat niets bevat dan een snelheid en een richting, en tusschen de gedagtenis van de ziel; en zy zal volkoomen overtuigd zyn van de valschheid der gevoelens van de materialisten, die beweeren, dat een geest niets anders is dan de vermenging van eenige stoffe. Die lieden hebben geen de minste kennis van de waare natuur der lighaamen, nogtans neemen byna alle de vrygeesten dit valsch gevoelen aan.
>
> (*Brieven* I, pp. 411-412)

Euler verdedigt hier de vrije wil tegen de in de monaden ‘ingebakken’ harmonie van de rationalisten, zoals hij dat nog uitvoeriger doet in de brieven vanaf nummer 91 (‘Vryheid der verstandige weezens, overeenstemmende met de leerstukken van den Christelyken Godsdienst’). In brief 92 (*Brieven* II, pp. 74-75) bespreekt hij wat men onder ‘geest’ moet verstaan. Wolff en zijn aanhangers, schrijft Euler, gaan voor de stoffelijke wereld uit van zelfstandige entiteiten die geen uitgebreidheid hebben en die geen verdere deling toestaan. Maar daar blijft het niet bij, want de monaden zijn ook nog bezield:

> Maar, volgens den Heer Wolf, zyn niet alleen alle de lighaamen

> zaamgesteld van monaden, maar elke geest is niet dan een monade; en het Opperweezen, ik durve het byna niet zeggen, is ook een monade: het geene geen heerlyk denkbeeld geeft van God, de geesten en onze zielen.

Euler verzet zich tegen het idee dat zijn ziel niet meer voorstelt dan de kleinste deeltjes van zijn lichaam. Stel je voor, schrijft hij, in één voorwerp zouden verschillende zielen samengevoegd kunnen zijn: 'een stuk papier, by voorbeeld, waar mede men een pyp tabak kan aansteeken'. Geest, ziel en God zijn voor Euler niet aan een plaats te binden.

Een andere kwestie die Euler voor Frederike uiteenzette, betreft het begrip materie. Volgens Descartes heeft de materie alleen uitgebreidheid. Maar volgens Newton heeft materie van zichzelf ook traagheid. Materie volhardt in haar beweging. Wie heeft er gelijk? Of hebben de 'beruchte wolfiaansche wysgeeren' gelijk die stellen dat 'elk lighaam, uit kragte van zyn eige natuur geduurig geweld doet, om zyn staat te veranderen'. Euler volgde Newton in de bewegingswetten, maar niet in diens wet dat twee massa's elkaar op afstand aantrekken, namelijk met een kracht die evenredig is met het product van de massa's en omgekeerd evenredig met het kwadraat van hun onderlinge afstand. Voor Euler was het idee dat twee lichamen op afstand een kracht op elkaar zouden uitoefenen (de zogeheten *actio in distans*, een van de fysische strijdpunten sinds Newton) onacceptabel.

Hevige discussie was er verder over het principe ('gevoelen') van kleinste werking. Het was onderdeel van een door meer fysici aangehangen plan om tot een axiomatische verklaring van allerlei mechanische verschijnselen te komen. Het principe bleek onhoudbaar, maar het had prominente aanhangers, onder meer Maupertuis, die het in 1746 introduceerde als centraal axioma in de mechanica. Maupertuis was na een carrière als organisator van grote ondernemingen, zoals de meridiaanmeting in Lapland, president van de Berlijnse academie geworden. Hij was geen kleine speler in het spel, en Euler die vanaf 1741 tot 1766 in Berlijn aan de academie verbonden was, volgde en verdedigde hem. Eulers rol in de verwikkelingen – die zover gingen dat Voltaire de hoofdpersonen in een satire met elkaar liet rollebollen – is bijvoorbeeld in de biografie *Leonhard Euler* (Thiele 1982, pp. 69-87) mooi in beeld gebracht. Voor Frederike maakte Euler het 'gevoelen van de kleinste werking' aan de hand van voorbeelden aannemelijk (*Brieven* I, pp. 423-424). Sommige verschijnselen in de natuur hebben gemeenschappelijk dat ze een bepaalde grootheid zo klein of zo groot mogelijk maken (voor een lichtstraal bijvoorbeeld de benodigde tijd voor het afleggen van de weg tussen twee punten). Maupertuis zag daarin een algemeen principe. Die generalisatie ging te ver, maar vormde wel een inspiratiebron voor verder onderzoek.

Euler stelt de opponenten van het principe als spotters voor, en 'geen vrienden van den heer de Maupertuis'. Wolff protesteerde. Volgens hem misbruikte Euler zijn prestige als wiskundige om zijn gelijk door te drukken op een terrein waarop hij minder goed thuis was.[2]

5.6 PROBLEMEN EN METHODEN VAN ALLE TIJDEN

Niet alle wiskunde was in handen van genieën. Sterker nog, een veel groter aantal wiskundigen bedreef een traditionele vorm van wiskunde. Daar zat wel enige ontwikkeling in, bijvoorbeeld omdat de gebruikte apparatuur evolueerde, maar de zeventiende-eeuwer zou het werk van zijn collega uit de achttiende eeuw zonder veel problemen kunnen volgen, heel anders dan in de Grote Wiskunde.

Een exponent van deze groep – waarin we bijvoorbeeld ook stuurlieden, architecten en beeldende kunstenaars vinden – is de landmeter Johannes Morgenster (of Morgestar). In de eerste druk (1703) van zijn *Werkdadige Meetkonst* noemt hij zichzelf 'Mathematicus en Gesworen Landmeter der Provincie van Overijssel' en hij draagt het boek op aan 'Burgemeesteren, Schepenen en Raden der Stadt Zwolle' (Pouls 1997, p. 254). Het is daarom aannemelijk dat Morgenster uit Zwolle afkomstig was, of in elk geval daar werkte.

Zijn boek was gedurende de achttiende eeuw het toonaangevende leer- en handboek op het gebied van de landmeetkunde. Het kwam in de plaats van boeken van het duo Sems en Dou (1600) en van Van Nispen (1662), en het werd in 1828 opgevolgd door Gisius Nanning, die over zijn voorganger schreef:

> Jaren lang was de *Werkdadige Meetkonst* van Morgenster het handboek van den Nederlandschen landmeter; en het is onbetwistbaar, dat dit werk voor dien tijd, niet alleen zeer vele verdiensten had; maar tevens veel tot de vorming van goede landmeters heeft bijgedragen. Inmiddels is er in het wetenschappelijke zeer veel veranderd; (Gisius Nanning 1828, pp. iii).

WERKDADIGE
MEETKONST,
Tonende
Klaar en beknopt, hoe dat al 't gene een *Ingenieur* en *Landmeter* te meten voorvallen kan, wiskonstig met en zonder Hoekmeting, door de minste moeite gemeten word.
HIER BY IS GEVOEGT
Een Verhandeling van Roeden en Landmaten, in de voornaamste Plaatzen van de Seven Vereenigde Provincien, en eenige andere daar omtrent leggende Plaatzen, gebruikelyk.
Voor dezen beschreven door
JOHANNES MORGENSTER.
Nu deze tweede Druk, Overgezien, Vermeerdert en in Kopere Platen gebragt
DOOR
JOHANN HERMANN KNOOP,
Liefhebber der *Mathematische* Wetenschappen.

Te LEEUWARDEN,
Gedrukt by ABRAHAM FERWERDA, 1744.

Figuur 5.5: De titelpagina van Morgensters *Werkdadige meetkonst* (1744).

Het boek, dat in eerste druk 350 pagina's telde, groeide in 1744 bij de tweede editie, die door de uit Kassel afkomstige en in Leeuwarden werkzame hovenier Johann Hermann Knoop verzorgd werd, tot 742 pagina's (zie figuur 5.5). In 1784 verscheen een derde druk van 760 pagina's, die in 1820 door M.I. Swarts Bevel nogmaals uitgegeven werd. De *Werkdadige Meetkonst* stond op de boekenlijst van de Fundatie van de Vrijvrouwe van Renswoude: een charitatieve instelling waar weesjongens in internaatsverband tot landmeter werden opgeleid. De instelling had scholen in Delft, Den Haag en Utrecht. De Utrechtse vestiging stelde in 1761 Laurens Praalder aan als instructeur, en tussen dat jaar en 1800 kocht deze vestiging 17 exemplaren van de *Werkdadige Meetkonst*. Dit aantal werd alleen overtroffen door 32 exemplaren van Pieter Venema's *Algebra* (Muller e.a. 1987).

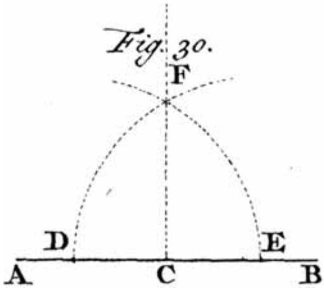
Morgenster begint met een cursus elementaire vlakke meetkunde, in de traditie van de *Elementen* van Euclides, die in 300 voor Christus begon, en die in het Nederlandse onderwijs standhield tot de invoering van de Mammoetwet in 1968. De zeventiende-eeuwse Dordtse landmeter Mattheus van Nispen bezong deze traditie als volgt:

Tot lof van de MEET-KONST.

Hoe heeft dien grooten *Archimeed*,
Tot onsen dienst zijn tijd besteed,
Hoe heeft *Pythagoras*, beneven
Den wijsen *Euclid*' , in sijn leven
Geyvert: om deês *Wijse-konst*,
Den Nazaet (uyt een pure gonst)
Klaer en volkomen naer te laten,
Tot voordeel aller Werelts-staten.
Want al de Regels die by haer
Gesmeed zijn, gaen soo wis en waer,
Dat al de werelt schoon s'on-eens is,
Nochtans in dese konste eens is.
Want hier door *d'Hemel-meter* kan
Een Grond-vest vinden, die hem van
Des *Hemels-loop* geeft wisse leere,
Om sien wat dat sig rust of keere.
Ook kan hier door een *Veldt* of *Landt*
Revier, of *Meyr*, ook *Zéê* en *Strandt*,
Na rechte waerheydt uyt-gebeeld zijn,
En ook haer grootheyd med' gedeelt zijn.
Een *Bouw-heer* vint hier ruyme stof,
Om deftigh eenigh *Huys* of *Hof*,
Meet- en *Bouwkunstigh* te verçieren,
In 't kort geseyd, deês gulde swieren,
Zijn al de werelt wonder nut,
En sonder haer hoe vond men stut
Om werelt wijsheyd te bekomen?
Och of dit recht wierd waer-genomen!

Terug naar Morgenster en naar een voorbeeld uit zijn cursus vlakke meetkunde: het tekenen van een lijn, loodrecht op een gegeven lijnstuk *AB*, door een op dat lijnstuk gelegen punt *C*. Dat gaat zoals de voor-Mammoet generatie in Nederland het zonder enige aarzeling nog steeds zou uitvoeren: Vanuit *C* pas je op *AB* met de passer aan weerszijden gelijke lengten *CD* en *CE* af. Met de zo gevonden punten *D* en *E* als middelpunten en met *DE* als straal, teken je twee cirkelbogen die elkaar boven het lijnstuk *AB* snijden in *F*. Lijnstuk *CF* is de gevraagde loodlijn. Figuur 5.6 toont Morgensters eigen constructie.

Dat *CF* loodrecht op *AB* staat, bewijst Morgenster met een verwijzing naar Propositie 11 uit Boek 1 van Euclides' *Elementen*. Daar constateert Euclides dat de driehoeken *CDF* en *CEF* congruent zijn, omdat er drie paar even lange zijden zijn (*CD* = *CE* wegens constructie; *DF* = *EF* wegens constructie; *CF* komt in beide driehoeken voor). Dan



Figuur 5.6: In *C* een lijn op te richten, loodrecht op *AB*. Morgensters eigen Figuur 30, plaat III in de editie van 1744.

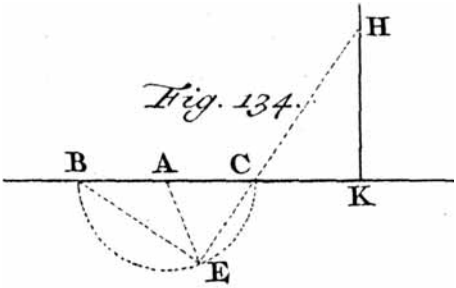
zijn ook de overeenkomstige hoeken van *CDF* en *CEF* gelijk, en dus bestaat de hoek van 180° uit twee gelijke hoeken *DCF* en *ECF*.

Deze beide zijn dus 90°. Ofwel: *FC* staat loodrecht op *AB*. Op soortgelijke wijze behandelt Morgenster een lange reeks meetkundige constructies, die hij op de wijze van Euclides met passer en liniaal uitvoert. Dit alles dient ter inleiding van waar het hem met de *Werkdadige Meetkonst* eigenlijk om gaat: het werk in het veld, het meten en afpassen van hoeken en afstanden en het verwerken van de gegevens bij concrete taken, zoals het meten van de oppervlakte van een niet toegankelijk terrein.

Het probleem van zojuist (een loodlijn op een gegeven lijn trekken) zal ook vaak in het veld uitgevoerd moeten worden. Maar daar schiet je met een passer niet veel op. Een touw of ketting vastgepind in de grond en met een vaste lengte, kan als alternatief voor een passer dienen, maar de bezwaren zijn evident. Wat te doen als er binnen de cirkel die je zou trekken een boom staat, en hoe markeer je de cirkel op het terrein, en heb je die cirkel eigenlijk wel nodig?

Morgenster onderscheidt bij zijn aanpak twee methoden: de eerste gaat met een hoekmeting, de tweede door alleen lengten te meten. Als je op het lijnstuk *BK* een loodlijn in *K* moet trekken (zie figuur 5.7), dan zet je een hoekmeetinstrument in *K*. Je viseert met een van de wijzers het punt *B*, en kijkt door het vizier op de wijzer die loodrecht op de eerste wijzer staat. Via aanwijzingen laat je je 'dienaer' zo door het veld bewegen tot hij in het tweede vizier in beeld is en daar laat je hem een baken plaatsen.

Maar het kan volgens Morgensters 'Tiende Werkstuk' (pp. 176-177) ook door de landmeter alleen, zonder hoekmeting uitgevoerd



Figuur 5.7: Een lijn loodrecht op *AB* uit te zetten; Morgensters eigen Fig. 134, plaat IX in de editie van 1744.

worden. Dat doet hij als volgt (zie figuur 5.7): Hij maakt het probleem eerst iets gemakkelijker. Op lijn *AB* zet hij in *A* en *B* stokken, en op het verlengde van *BA* nog een stok in *C*, zodat *AB* en *AC* even lang zijn. Hoe dat moet, heeft Morgenster in de eerste negen 'Werkstukken' allemaal uitgewerkt.

Vervolgens past hij vanuit *A* buiten de lijn *BC* nog een keer de afstand *AB* af, en zet daar een stok in *E*. Volgens de constructie en een stelling van Euclides (de 'stelling van Thales', zie §2.2) is hoek *BEC* nu recht. Het vernuft van de oplossing zit in de stap die nu komt. Morgenster maakt nu een exacte kopie *HKC* van driehoek *BEC*, en wel zo dat de rechthoekszijde *KC* op lijn *BC* komt te liggen.

Hij doet dat door eerst *BC* op te meten en in het verlengde van *EC* het even lange stuk *CH* af te zetten (*CH* = *BC*). Ook meet hij *CE* en verlengt hij *BC* met een stuk dat even lang is als *CE*. Dat geeft *K*. De driehoeken *BCE* en *HCK* hebben twee paar gelijke zijden. Omdat die paren zijden bovendien in *C* twee gelijke hoeken insluiten, zijn ze exacte kopieën van elkaar (congruent), en daarom staat *HK* loodrecht op *BK*. *K* is namelijk de kopie van *E*, en die was als rechte hoek geconstrueerd.

Onpraktisch in deze constructie is dat het punt *K* pas aan het eind verschijnt en niet vooraf gegeven is. Met een kleine aanpassing is dat te verhelpen, een detail dat we hier achterwege laten. Voor Morgenster was dit trouwens geen probleem. Stel dat de loodlijn niet door K had moeten gaan, maar door een ander punt op *BC*. Dan had hij (met het 'Agtste Werkstuk') een lijn door dat punt getrokken, evenwijdig aan *HK*, en dat was dan de gevraagde loodlijn geweest.

We zien met Morgenster een professional aan het werk. Hij is bij de tijd met zijn instrumentarium en met de wiskundige theorieën die hij gebruikt zoals driehoeksmeting en logaritmen. Maar de 'werkstukken' en de uitwerkingen die hij zijn studenten voorhoudt, waren er in de zeventiende eeuw ook en voor een belangrijk waren ze er in de negentiende eeuw nog steeds. Morgenster 'paste op de plaats'.

5·7 AFWEGING

Hoe verhouden de 'grote wiskundigen' en de praktijkmensen uit de lange traditie zich tot elkaar? Deels zijn het dezelfde personen. Dat was in de zeventiende eeuw sterker het geval dan in de achttiende eeuw, maar het kwam voor. Van Euler weten we bijvoorbeeld dat hij langdurige werkzaamheden verrichtte voor de samenstelling van de Russische landkaart. Dit waren werkzaamheden die zeer belastend waren en die zijn gezichtsvermogen ernstig aangetast hebben. Soms hadden de groepen elkaar nodig. De expeditie in 1736-1737 van Maupertuis naar Lapland, met de 'grote' wetenschappelijke toetsing van de hypothese dat de aarde aan de polen afgeplat zou zijn, was zonder de vaardigheid in het landmeten niet succesvol geweest. Het Franse team met Zweedse assistentie had weliswaar de nieuwste apparatuur tot zijn beschikking, maar afstanden over land (of beter: over ijs) werden nog steeds met achter elkaar gelegde boomstammetjes bepaald.

Uit het veel grotere potentieel van praktijkmensen komen de nieuwe 'grote wiskundigen' op. Aan het einde van de eeuw is dat duidelijk waarneembaar bij de opleiding van militaire ingenieurs aan de Parijse École Polytechnique (gesticht 1795). Enerzijds was er het traditionele ambacht van deze groep, anderzijds waren veel van de 'grote' Franse wiskundigen uit het begin van de negentiende eeuw afkomstig van dit instituut, als student of als docent. Een goed voorbeeld, dat voortbouwt op de traditie van het landmeten, is de beschrijvende meetkunde, ontwikkeld door Gaspard Monge (1746-1818), die docent en later directeur was van de École Polytechnique.

De École Polytechnique stond model voor verschillende opleidingsinstituten, ook in universitair verband, die in de negentiende eeuw de motor voor de wetenschappelijke ontwikkelingen zouden vormen, en die zeer bijdroegen aan de verbreding van de wetenschap en het aanboren van nieuw talent. In de achttiende eeuw waren het vooral de academies die met continue financiële steun van de verschillende hoven initiatiefrijke wetenschappers sponsorden. Hun sprongen in het diepe vormen nu de curricula van de bovenbouw van het voortgezet onderwijs en het begin van het hoger onderwijs.

NOTEN

1. Zie Jahnke 2003, pp. 123-127, voor een gedetailleerde discussie van de gevolgen die het probleem van de trillende snaar had voor het begrip ‘functie’.
2. Breidert (1983) en Thiele (1982) geven een uitgebreid gedocumenteerde afweging van de rol die Euler speelde. Een algemeen historisch overzicht van de wetenschapsfilosofie zal dit beeld aanvullen voor de inbreng van de andere discussianten (met Kant als de belangrijkste van de nog niet genoemden).

LITERATUUR

Bierens de Haan, D., *Bibliographie Néerlandaise historique-scientifique des ouvrages importants dont les auteurs sont nés aux 16e, 17e et 18e siècle, sur les sciences mathématiques et physiques, avec leurs applications*, Rome 1883; reprint Nieuwkoop: B. de Graaf, 1965.

Breidert, W. ‘Leonhard Euler und die Philosophie’ pp. 447-457 in: J.J. Burckhardt, E.A. Fellmann, W. Habicht (eds.), *Leonhard Euler 1707-1783. Beiträge zu Leben und Werk. Gedenkband des Kantons Basel-Stadt*, Basel: Birkhäuser Verlag, 1983.

Dehling, H. en J. van Maanen, ‘Een plaquette voor Daniel Bernoulli. Kleine Groninger en grote wetenschapper’, *Nieuw archief voor wiskunde* (5) 4, nr. 3 (september 2003), pp. 254-257.

Euler, L., *Brieven over de voornaamste onderwerpen der Natuurkunde en Wysbegeerte*, 3 delen, Tweede druk, Leiden: By Pieter Pluygers, 1785-6.

Gisius Nanning, F.P., *Handleiding tot de werkdadige meetkunst*, 2 delen, ‘s Gravenhage en Amsterdam: Gebroeders Van Kleef, 1828.

Jahnke, H.N., ‘Algebraic Analysis in the 18th Century’, pp. 105-136 in: H.N. Jahnke (ed.), *A History of Analysis*, Providence, RI: American Mathematical Society and London Mathematical Society, 2003.

Morgenster Johannes, *Werkdadige Meetkonst, Tonende Klaar en beknopt, hoe dat al ’t gene een* Ingenieur *en* Landmeter *te meten voorvallen kan, Wiskonstig met en zonder Hoekmeting, door de minste moeite gemeten word.* Tweede Druk (Johann Hermann Knoop ed.), Leeuwarden: Abraham Ferwerda, 1744.

Muller, E. en C.J. Zandvliet, *Admissies als landmeter in Nederland voor 1811 …*, Alphen aan den Rijn : Canaletto, 1987.
Pouls, H.C., *De landmeter: inleiding in de geschiedenis van de Nederlandse landmeetkunde van de Romeinse tot de Franse tijd*, Alphen aan den Rijn: Canaletto, 1997.
Thiele, R., *Leonhard Euler*, Leipzig: Teubner, 1982.

6

Van wiskunstige wetenschappen tot zuivere wiskunde – de negentiende eeuw

Danny Beckers

Twee begrippen kunnen als centraal thema voor de geschiedenis van de West-Europese wiskunde in de negentiende eeuw worden beschouwd: zuivering en institutionalisering. Beide hangen nauw met elkaar samen. Beide hangen tevens samen met de groeiende behoefte aan onderwijs; het onderwijs dat door de regeringen van de opkomende natiestaten als een bindmiddel voor hun burgers werd gehanteerd.

De uitkomst van het proces van zuivering was een nieuwe, zuivere wiskunde. De zuivere wiskunde bekommerde zich, meer dan gebruikelijk was geweest in het brede veld van de achttiende-eeuwse wiskundige wetenschappen, om bewijsvoering en logische samenhang. Daarbij trachtte de wiskunde zich los te maken van iedere aanspraak op empirie en was het mogelijk dat er pogingen ontstonden om de wiskunde in zichzelf te funderen. De negentiende-eeuwse wiskunde kenmerkt zich door een toenemende abstractie. Er werden pogingen ondernomen om het hele wiskundige corpus in één systeem te vatten – een hernieuwde poging tot het formuleren van Euclides' *Elementen* dus, maar nu voor het inmiddels stevig uitgedijde vakgebied. Die delen der wiskundige wetenschappen die zich daar minder toe leenden – met name die onderwerpen die in voorgaande eeuwen tot de gemengde wiskunde waren gerekend, zoals landmeetkunde en artillerie – werden uitgezuiverd en behoorden niet langer tot de wiskunde. Het werden afzonderlijke vakgebieden waarop de wiskundige theorie kon worden toegepast.

Het zuiveringsproces van wiskunde kon zich voltrekken doordat het vak een belangrijke rol kreeg toebedeeld in het West-Europese onderwijs. In het onderwijs kreeg juist de exactheid van het vak waardering, omdat het de mens beschaafde en veredelde. Die waardering had een concentratie op de logica en interne coherentie van wiskunde tot gevolg. Leerboeken op elk niveau trachtten in toenemende mate de samenhangen in het wiskundig bouwwerk te tonen. Het onderwijs in wiskunde is dus een logische plaats om een verhaal over de cultuurgeschiedenis van wiskunde in de negentiende eeuw te beginnen.

6.1 WISKUNDE IN HET ONDERWIJS

De negentiende eeuw was een eeuw van onrust en revoluties in Europa. De Franse Revolutie en daarop volgende Napoleontische periode trokken een spoor van geweld over het continent. De revoluties van 1848 brachten in veel Europese landen meer macht voor de burgerij ten koste van de zittende monarchen. Met de revoluties werd de centraal bestuurde staat een feit en kwam het onderwijs in een nieuw daglicht te staan. Het negentiende-eeuwse onderwijs diende niet langer primair om een beroep te leren uitoefenen, het was een manier om een nieuw burgerschapsideaal te verspreiden. De burger werd in het onderwijs opgevoed en geconfronteerd met eeuwig gewaande waarden – zaken die houvast boden in deze revolutionaire tijd. De negentiende eeuw was bijvoorbeeld de eeuw waarin de Universele Rechten van de Mens werden uitgedragen. Het was tevens de eeuw van het nationalisme: de burger werd op de eerste plaats Nederlander, Fransman of Brit.

Het nieuwe burgerschapsideaal behelsde onder andere dat de burger werd opgevoed tot een vaderlandslievende en moreel onberispelijke man. Dat betekende dat het staatsbelang van onderwijs enorm toenam. Slechts in het Verenigd Koninkrijk bleef het onderwijs aan de burger een private aangelegenheid. Elders in Europa ontstond (naast het private stelsel) het door de staat gefinancierde en van staatswege gecontroleerde onderwijs.

In de achttiende eeuw was het – zelfs in een land als Nederland waar relatief veel mensen leerden lezen – zeldzaam dat mensen leerden rekenen. Een turfsgewijze beheersing van het lokale munten-, maten- en gewichtenstelsel voldeed voor de meesten. Leren rekenen was duur en bleef zodoende voorbestemd voor die mensen die dat in hun toekomstige beroep ook echt nodig hadden: zonen van kooplieden en ingenieurs kregen bijvoorbeeld wel rekenen geleerd. Aangezien het rekenwerk dat zij in hun vak tegenkwamen zich liet terugvoeren op een paar basisregels, kregen zij de oplossingsrecepten voor die regels gepresenteerd en moesten ze die leren hanteren.

De negentiende-eeuwse reken- en wiskundeles onderscheidde zich hiervan in drie opzichten. Op de eerste plaats groeide de leerlingpopulatie doordat er meer mensen werden gestimuleerd zich te scholen. Die stimulans werd gegeven door de overheid of door particuliere organisaties die zich het lot van de (land)arbeider aantrokken. In veel Europese landen werd er een vorm van door de staat gefinancierd lager onderwijs in het leven geroepen waar leerlingen (onder andere) leerden rekenen. Dat lager onderwijs was bestemd voor de kinderen uit de lagere sociale klassen – leerlingen die voorheen hoogstens hadden leren lezen. Ten tweede werd er meer wiskunde onderwezen. Op veel scholen voor de burgerij, ook die niet onder staatstoezicht stonden, verschenen elementaire algebra en meetkunde op het curriculum. Ten derde veranderde het karakter van de onderwezen theorie. De nadruk van het wiskundeonderwijs verschoof van praktische rekenrecepten naar axioma's (uitgangspunten), stellingen en bewijzen. Wiskunde werd gepresenteerd als een logisch samenhangend geheel: in bewijzen van stellingen werd alleen gebruik gemaakt van eerder bereikte resultaten. Zelfs in het Verenigd Koninkrijk, waar staatsonderwijs niet van de grond zou komen (en het hierboven genoemde eerste punt dus helemaal hing op particuliere organisaties), veranderde het karakter van het aangeboden onderwijs drastisch betreffende curriculum en didactiek. Met de in 1846 ingestelde *College of Preceptors* werd een poging ondernomen om de onderwijzers op basis van examens te certificeren en de *Educational Times* zou met een stevige nadruk op wiskunde de toon zetten voor wat belangrijk was. In heel Europa, ook in Engeland, bleef foutloos rekenen (en dus veel oefenen) belangrijk, maar de goede onderwijzer slaagde er tevens in de leerling begrip bij te brengen van het onderwezene.

Er is een tweetal drijfveren aan te wijzen voor deze ontwikkeling. Op de eerste plaats maakten rekenen en wiskunde, evenals bijvoorbeeld vaderlandse geschiedenis, deel uit van het kennisideaal van de eerzame burger. Wiskunde werd namelijk geacht een vormende waarde te hebben. Door wiskunde leerde een mens goed en zuiver te redeneren. Dat was vanzelfsprekend waardevol voor een eerzaam burger: volgens de verlichtingsidealen ontsproten verstandig en moreel juist gedrag uit dezelfde bron. Kennis en deugd waren één en konden elkaar versterken door een scherpe logica. En naar de stellige overtuiging van veel burgers was wiskunde de ideale wijze om die logica op te doen. Op de tweede plaats is de negentiende eeuw tevens de eeuw van de opkomst van het militair en technisch onderwijs. Met name het militair onderwijs (denk aan de commandanten van de korpsen der genie en artillerie) werd onder staatstoezicht van een stevigere dosis wiskunde voorzien en de opleidingen eisten van aankomende studenten ook een behoorlijke kennis van die vakken. Bij de burgerlijke ingenieursopleidingen valt een vergelijkbare tendens waar te nemen. Bovendien slaagden deze opleidingen in de meeste landen erin ook een *conditio sine qua non* te worden voor de (hogere) technische overheidsfuncties. Die ontwikkeling maakte het voor kinderen uit de burgerij min of meer tot een verplichting om wiskunde tot zich te nemen.

Binnen het militair onderwijs was altijd aandacht geweest voor wiskunde. Gedurende de zeventiende en achttiende eeuw waren er in diverse Europese landen militaire scholen gevestigd, die de opleiding van de militaire officieren voor hun rekening namen. Van oudsher was de militaire academie het instituut waarlangs de adel de betere militaire posities kon bereiken. De wiskunde die aan deze academies aan bod kwam, was veelal receptsgewijs van aard. Zo werd in de standaard boeken voor de artillerie bijvoorbeeld een regeltje aan de hand gedaan om het aantal kogels in een (op een bepaalde manier gebouwde) kogelstapel snel te tellen. In de negentiende-eeuwse opleiding voor de artillerist was de regel voor het tellen van het aantal kogels in een kogelstapel een toepassing van een stuk algebraonderwijs: de leerling werd geacht de bijbehorende formule te kunnen lezen en afleiden. Op zich veranderde er gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw weinig aan de inhoud van het vakgebied van de militair ingenieur. Een inleiding in de (zuivere) wiskunde verscheen echter overal op het curriculum. Dat doet vermoeden dat ook hier de vormende waarde van zuivere wiskunde als een argument werd gehanteerd.

Met de curriculumveranderingen kwam ook een nieuw soort studenten aan de militaire academies: de Europese overheden begonnen zich begin negentiende eeuw op de burgerij te richten voor het werven van officieren. In diverse Europese landen ging de introductie van deze nieuwe wiskundige inleiding op het curriculum gepaard met problemen. In Spanje botsten de nieuw opgeleide (burgerlijke) officieren met de oudere (adellijke) generatie. In Nederland leidde de introductie van cursussen in de zuivere wiskunde tot wrijving tussen onderwijzers en korpsleiding. Het was in beide gevallen de overheid die besloot dat de mathematische introductie diende te blijven bestaan.

Ook in het onderwijs aan burgerlijke ingenieurs werd gaandeweg de negentiende eeuw meer wiskunde geïntroduceerd. De *École Polytechnique*, die in 1794 te Parijs was opgericht, diende vele andere landen tot voorbeeld. Een introductie in de zuivere wiskunde, voornamelijk in de meetkunde, maar ook in de algebra en infinitesimaalrekening, maakten aldaar deel uit van het curriculum. Alleen in het Verenigd Koninkrijk werd door de overheid de oprichting van een dergelijk instituut niet in overweging genomen.

Voorts veranderde de status van de wiskunde aan de Europese universiteiten. Had het wiskundeonderwijs zich tot 1800 veelal beperkt tot de propedeutische cursus in de eerste zes boeken van *De Elementen* van Euclides, na 1800 kwam er beduidend meer ruimte voor wiskunde. Aan alle Europese universiteiten werden leerstoelen wis- en natuurkunde opgericht. In alle gevallen kwam de wiskunde los van de propedeusecursussen, waartoe ze in de achttiende eeuw beperkt was gebleven; het werd voor studenten natuurlijker om te promoveren op een wiskundig onderwerp.

Al die nieuwe onderwijsvormen stimuleerden de opkomst van zuivere wiskunde. Op de eerste plaats boden ze een werkomgeving aan wiskundigen. Het was niet zinloos om wiskunde te studeren. Wiskunde bood mogelijkheden voor de toekomst. Een positie als wiskundeonderwijzer aan een gymnasium bood in veel Europese landen de mogelijkheid om wiskundig actief te blijven. Als gerespecteerd onderwijzer werd men min of meer geacht lesboeken of wetenschappelijke verhandelingen te publiceren. Velen deden dat ook, eventueel in afwachting van een positie aan een universiteit. Op de tweede plaats ontstond er een vraag naar wiskundige (les)teksten door het groeiende aantal opleidingen en studenten. De boeken van Cauchy en de traktaten van Dedekind, die in de volgende paragraaf ter sprake zullen komen, waren bijvoorbeeld teksten die geschreven werden ten behoeve van het onderwijs aan hogescholen. Daarnaast worden ze gezien als mijlpalen in de ontwikkeling van de zuivere wiskunde.

6.2 NIEUWE INSTITUTEN

Diverse vormen van institutionalisering van wiskunde zijn reeds aan bod geweest. De verschillende vormen van onderwijs – in het bijzonder de faculteiten der wis- en natuurkunde en de polytechnische scholen – waren plaatsen waar de zuivere wiskunde kon aarden. Het was bijvoorbeeld binnen de Parijse *École Polytechnique* dat A.L. Cauchy (1789-1857) zijn grondslagen van de analyse onderwees; aan de universiteit van Göttingen dat Riemann zijn theorie van integraalrekening ontwikkelde; ten behoeve van zijn onderwijs aan de *Technische Hochschule* van Brunswijk dat Richard Dedekind zijn theorie van reële getallen publiceerde. Binnen alle onderwijsinstituten droeg de wiskunde bij aan de vorming van verstandige en moreel zuivere burgers voor de nieuwe natiestaten. In mindere mate aardde de wiskunde ook in de statistische en verzekeringsorganisaties. Al deze instituten droegen er in elk geval toe bij dat wiskunde een meer alledaagse cultuuruiting kon worden. In het bijzonder kon de zuivere wiskunde in aanzien winnen. Dat was binnen de achttiende-eeuwse instituten niet in die mate mogelijk gebleken.

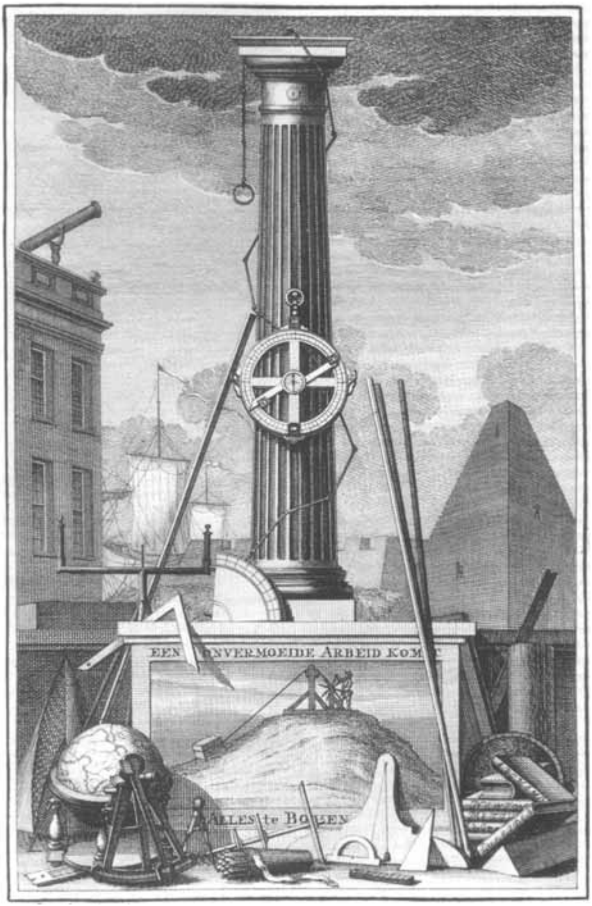
Een van de oudere instituten was de nationale academie. De nationale academies waren veel ouder dan de natiestaat. De *Royal Academy* in Londen, de *Académie Royale* in Parijs, alsmede hun Pruisische en Russische varianten waren een uiting van een veel ouder wetenschapsideaal. Ze waren het sieraad van een vorst, niet van een staat. Binnen die academies hadden de wiskundige wetenschappen vanzelfsprekend een rol gespeeld, maar dan vanuit het humanistisch georiënteerde ideaal van de *Republiek der Letteren* – de virtuele gemeenschap van Europese geleerden.

De negentiende-eeuwse academies waren op de eerste plaats nationaal, dat wil zeggen: de natie dienend. Voor zover zij internationaal opereerden, diende dat ter glorificering van de eigen natie. Het was vooral in die laatste rol dat de zuivere wiskunde een plaats werd toebedeeld. Daarnaast dienden de wiskundigen die de eer hadden verkozen te worden tot leden van dergelijke academies, toch op de eerste plaats als vraagbaak voor technische kwesties. Bij karteringsoperaties en de invoering van het metrieke stelsel werden bijvoorbeeld de leden van de nationale academies om advies gevraagd – in feite ging het hier om kwesties die vooral in de achttiende-eeuwse betekenis van het woord tot de wiskunde werden gerekend, maar die in de loop van de negentiende eeuw verdwenen uit het kennisarsenaal van de wiskundige. Naast de universitaire leerstoelen in de wis- en natuurkunde betekende de benoeming van wiskundigen aan de nationale academies een bron van legitimatie voor de zuivere wiskunde.

De negentiende eeuw is tevens de eeuw van de wiskundige genootschappen. De *London Mathematical Society* (1865), het Moskouse wiskundige genootschap (1867), de *Société Mathématique de France* (1872), de Deense *Matematisk Forening* (1873), de *Circolo Matematico di Palermo* (1884) en de *Deutsche Mathematiker Vereinigung* (1890) waren beroepsverenigingen van wiskundigen die hun activiteiten zichtbaar wilden maken op het (inter)nationale toneel. Hoe zeer deze genootschappen nationalistisch geïnspireerd waren, blijkt wel uit het feit dat in Bohemen in 1862 – op dat moment nog onder jurisdictie van het Habsburgse Oostenrijk – reeds een gezelschap werd opgericht dat, buiten de Duitstalige universiteiten om, het geven van voordrachten in de streektaal bevorderde. De nationalistische inspiratie blijkt tevens uit de productie van nationale geschiedschrijving: in boeken, lezingen en tijdschriftbijdragen werden vaderlandse grootheden in de wiskunde herdacht.

Vanaf de jaren 1870-1880 kwamen wiskundigen – op initiatief van wiskundige genootschappen – bijeen op symposia die meer en meer een internationaal karakter kregen. De eerste echt internationale wiskundeconferentie vond plaats in Chicago in 1893. In 1897 volgde de internationale conferentie te Zürich en drie jaar later, in 1900, kwam de internationale wiskundige gemeenschap tezamen in Parijs. Deze internationalisering van wiskundebeoefening was een stimulans voor de zuivere wiskunde. Hoewel de genootschappen zeker niet exclusief de zuivere wiskunde propageerden, werden de standaarden voor wiskundig onderzoek door de congressen meer universeel van karakter. Over de hele wereld werden vergelijkbare wiskundige problemen aangepakt en werden daarbij dezelfde maatstaven gehanteerd.

Kader 6.1: Een Onvermoeide Arbeid komt Alles te Boven.



Temidden van alle Europese genootschappen bevond zich het Wiskundig Genootschap 'Een Onvermoeide Arbeid komt Alles te Boven' dat te Amsterdam resideerde. Het was bijzonder omdat het reeds in 1778 was opgericht, lang voor de andere wiskundige genootschappen het licht zagen. Oorspronkelijk had het dan ook tot een heel andere, achttiende-eeuwse (genootschaps)cultuur behoord, namelijk tot een cultuur van liefhebbers die gezamenlijk opgaven oplosten. Als enige in Europa veranderde het Amsterdamse Wiskundig Genootschap halverwege de negentiende eeuw van karakter en werd het langzaam een beroepsvereniging zoals die in de andere Europese landen ook werden gevestigd.

Wiskundetijdschriften waren ouder dan de genootschappen. De eerste verschenen in de achttiende eeuw. Zij werden geredigeerd door een klein groepje enthousiastelingen – vaak hingen ze zelfs op één persoon. Sommige van deze tijdschriften waren ten behoeve van liefhebbers, zoals het bekende *The Lady's Diary* dat van begin achttiende tot halverwege de negentiende eeuw alle Engelssprekende wiskundeliefhebbers van opgaven voorzag. Een Nederlands voorbeeld is *Wiskunstige Verlustiging* (1793-1795).

Aan het eind van de negentiende eeuw bestonden er wereldwijd ongeveer zeshonderd tijdschriften waarin men kennis kon nemen van wiskunde. Dat was ruim het drievoudige van het aantal aan het begin van de negentiende eeuw. Veel van die tijdschriften werden gepubliceerd voor onderwijzers of liefhebbers. Een deel van de toename in aantal tijdschriften kwam op het conto van een negentiende-eeuwse noviteit: het wetenschappelijke wiskundetijdschrift. Het waren tijdschriften waarin specialistische artikelen met betrekking tot nieuwe wiskundige vondsten verschenen en waarin nieuwe wiskundeboeken langs de lat van de zuivere wiskunde werden gelegd. Een voorbeeld van zo'n tijdschrift was het *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (sinds 1826). Overigens stond dit tijdschrift in de wandelgangen ook wel bekend als het *Journal für die rein unangewandte Mathematik* – een indicatie voor het begrip waar de zuivere wiskunde buiten kringen van direct betrokkenen op kon rekenen. Vanaf de jaren 1870 publiceerden ook veel wiskundige genootschappen een eigen wiskundetijdschrift. De opkomst van deze tijdschriften illustreert de voortschrijdende specialisering in het wetenschappelijk veld; voorheen verschenen nieuwe wiskundige vondsten in wetenschappelijke tijdschriften zonder specialisatie, samen met natuurkundige, theologische, historische of rechtskundige artikelen.

De productie van wiskundige literatuur groeide enorm gedurende de negentiende eeuw. Het aantal wiskundige boeken en tijdschriften dat aan het begin van de eeuw nog te overzien was, werd in de loop van de negentiende eeuw dermate snel aangevuld met nieuwe publicaties, dat geen mens meer alles kon bijhouden. Diverse wiskundigen, soms in hun voornemen gesteund door genootschappen, ontplooiden bibliografische initiatieven om de groeiende berg wiskundige literatuur overzichtelijk te houden. Deze bibliografische initiatieven culmineerden in *Revue semestrielle des publications mathématiques*, dat sinds

1893 op Nederlandse bodem onder de auspiciën van het Wiskundig Genootschap werd uitgegeven. In dit tijdschrift verscheen ieder half jaar een opsomming van de wiskundige bijdragen die in de afgelopen tijd gepubliceerd waren. De lemma's waren geordend volgens een door Henri Poincaré (1854-1912) ontwikkeld principe en allemaal van een samenvatting voorzien, zodat in een oogopslag was te zien of de desbetreffende tekst de moeite van het opvragen waard was. De *Revue* plaatste de Nederlandse wiskundige gemeenschap op de internationale kaart. De enorme krachtinspanning die de kleine wiskundige gemeenschap in Nederland moest leveren om dit bibliografisch tijdschrift te laten verschijnen, werd mede mogelijk gemaakt door de financiële steun van instanties die in deze onderneming de grootsheid van de Nederlandse natie weerspiegeld zagen.

6.3 ZUIVERE WISKUNDE

De institutionalisering en zuivering van de wiskunde gingen hand in hand. Veranderden de nieuwe instituties de uiterlijke manifestatie van wiskundebeoefening, het zuiveringsproces veranderde de wiskunde zelf drastisch. Het bewijs en de wijze waarop stellingen en bewijzen aaneen werden geschakeld, kregen meer aandacht. Een scherpe formulering van axioma's en definities – zodat ze in bewijzen gebruikt konden worden – werd van belang. Sommige zaken die voorheen aanschouwelijk evident hadden geleken, werden in de zuivere opvatting van het vakgebied stellingen die bewezen dienden te worden – anders liet men immers empirische argumenten een rol spelen in de wiskunde en die wilde men nu juist uitzuiveren. Het bewijs zelf kreeg ook veel meer nadruk. In een bewijs mocht alleen gebruik worden gemaakt van reeds aangenomen of bewezen eigenschappen.

Kader 6.2: Carl Friedrich Gauß.

Het belang dat aan bewijzen werd gehecht, kan worden geïllustreerd met de beroemde Duitse wiskundige Carl Friedrich Gauß (1777-1855), die tot viermaal toe een bewijs formuleerde van de fundamentele stelling van de algebra. Die stelling zegt dat elk n-degraads polynoom te schrijven is als een product van n lineaire factoren met complexe coëfficiënten.

In de achttiende eeuw was de fundamentele stelling van de algebra geen stelling geweest. Wiskundigen waren er eenvoudigweg vanuitgegaan. Dit, omdat men altijd met concrete functies werkte en die lineaire factoren dus uitrekende. Met de fundamentele stelling van de algebra probeerden wiskundigen iets te zeggen over het gedrag van een polynoom, ook wanneer ze niet in staat waren er concreet aan te rekenen – hetzij omdat de functie niet bekend was, hetzij omdat het rekenwerk te moeilijk werd.

Die ontwikkeling vond gedurende de negentiende eeuw plaats. Aan het eind van de negentiende eeuw waren de bijdragen aan de zuivere wiskunde: een korter bewijs, een abstracter (en daarmee breder inzetbaar) resultaat, of een beter gefundeerde theorie, een gewaardeerde bezigheid waarvoor plaats was in tijdschriften of wiskundige series. Wiskundig onderzoek als zodanig behoorde vrijwel nergens expliciet tot de taakomschrijving van hoogleraren, maar het was een gewaardeerde bezigheid. Om te illustreren waar het bij de zuivering van wiskunde om handelde, volgen hier twee voorbeelden.

Getalbegrip

Het eerste voorbeeld is het getalbegrip. In de achttiende eeuw was het getal voor wiskundigen ongecompliceerd. In rekenboeken uit die periode zien we soms een definitie van een getal, maar veelal gingen de auteurs ervan uit dat de lezer al kon tellen en geen moeite meer had met het begrip zelf. Met die getallen leerde men vervolgens rekenen: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen en soms ook nog worteltrekken. Waarom de rekenregels die werden opgegeven werkten, werd niet behandeld: het ging erom dat de leerling de desbetreffende operaties snel en foutloos leerde uitvoeren. In het bijzonder werd de overstap van natuurlijke getallen (1, 2, 3 et cetera) naar negatieve getallen, breuken en irrationale getallen zorgeloos gemaakt.

In de zuivere wiskunde werd het begrip getal gedefinieerd. De eerste definities uit het begin van de negentiende eeuw sloten aan bij de intuïtie: ‘een getal is de naam die we geven aan een verzameling van eenheden’, luidt een definitie die in het secundair onderwijs de gehele negentiende eeuw populair bleef. Ook de getaloperaties werden van een definitie voorzien: optelling was het bijeenvoegen van eenheden, vermenigvuldigen was het herhaald optellen, et cetera. Die definities werden vervolgens gebruikt om inzichtelijk te maken dat de uitdrukkingen $a + b$ en $b + a$, alsmede bijvoorbeeld *ab* en *ba*, dezelfde waarden representeerden.

Maar dat was nog slechts een begin. De introductie van negatieve getallen, breuken en reële getallen werd ook aan een nadere inspectie onderworpen. De idee dat, bijvoorbeeld, de optel- of vermenigvuldigingseigenschappen die afgeleid waren voor natuurlijke getallen, automatisch ook voor negatieve getallen, breuken en reële getallen zouden gelden, zat sommige wiskundigen niet lekker. Negatieve getallen werden veelal geïntroduceerd met een beroep op hun gebruik in berekeningen: winst versus verlies, links versus rechts van een bepaald punt op een getallenlijn. Dat rook naar gebruik van empirische waarnemingen en die wilde men juist uit de wiskunde wegwerken. In het geval van de negatieve getallen viel dat nog lang niet mee. De Britse wiskundige George Peacock (1791-1858) besloot de negatieve getallen toe te laten door expliciet te 'veronderstellen' dat ze aan dezelfde rekenregels voldeden als de natuurlijke getallen. Daarmee omzeilde hij een problematiek die door zijn tijdgenoten wezenlijk werd geacht. De meeste wiskundigen zagen negatieve getallen als een realiteit: in de praktijk van winstberekening doken ze op in de betekenis van verlies. Aangezien die negatieve getallen er waren, was het dus zaak ze van een goede wiskundige abstractie te voorzien. Peacock, die had gemerkt hoe lastig dat te realiseren viel, koos op dat moment voor een ongebruikelijke uitweg. Maar die manier van operaties definiëren, werd langzaamaan geaccepteerd binnen de wiskunde.

In zijn *Was sind und was sollen die Zahlen?* uit 1878 beschreef Richard Dedekind (1833-1916), hoogleraar wiskunde aan de Polytechnische school van Brunswijk, een manier om, uitgaande van 'dingen' (eenheden) de natuurlijke getallen te construeren, daaruit de breuken te maken en tot slot – met behulp van wat we tegenwoordig Dedekindsneden noemen – de reële getallen te creëren. Bij elke stap toonde Dedekind aan dat de nieuwe definities van operaties die hij nodig had voor zijn oude verzameling (steeds in de nieuwe bevat), dezelfde betekenis behielden en voor de nieuwe getallen dezelfde rekenregels behouden bleven. Concreet rekenen deed Dedekind helemaal niet in zijn traktaat: hij wilde aantonen dat de getallen en de operaties die we gebruikten exact konden worden geformuleerd.

Kader 6.3: Richard Dedekind.

Dedekind (1833-1916) was hoogleraar wiskunde aan de *Technische Hochschule* van Brunswijk. Zijn *Was sind und was sollen die Zahlen?* uit 1878 gaf een belangrijke wiskundige fundering van het begrip reëel getal. Dedekind ging uit van de constructie van de breuken – hij keek alleen naar positieve getallen. Op de verzameling van breuken bracht hij zogenaamde 'sneden' aan. Bijvoorbeeld de eigenschap $x^2 = 2$ verdeelde (het positieve stuk van) de getallenlijn in een stuk waarvoor x^2 groter was dan 2 en een stuk waarvoor x^2 kleiner was dan 2. Die tweedeling (de snede) van de getallenlijn identificeerde Dedekind met de waarde waarvoor $x^2 = 2$. De breuk ¾ hoorde bij de eigenschap $x = ¾$. Zodoende konden alle getallen met behulp van de Dedekind-snede worden gerepresenteerd. Door nu optelling en vermenigvuldiging op deze sneden te definiëren, fundeerde Dedekind het begrip reëel getal.

Een vergelijkbaar doel streefde de Italiaanse wiskundige Giuseppe Peano (1858-1932) na toen hij in een artikel uit 1889 in vijf axioma's de structuur van de natuurlijke getallen vastlegde. Na pagina's van bewijzen toonde hij aan dat de natuurlijke getallen met een daarop gedefinieerde optelling inderdaad voldeden aan de eigenschap $a + b = b + a$. Met de verhandelingen van Dedekind en Peano werd het tellen abstracter: ons talstelsel werd een van de vele mogelijke materialisaties van een algemeen idee dat door bepaalde axioma's werd vastgelegd. Die axioma's leken, zeker bij Peano, willekeuriger te zijn geworden dan ze aan het begin van de negentiende eeuw waren. Willekeuriger in de zin, dat niet langer werd uitgesloten dat andere axioma's verzonnen konden worden die hetzelfde bereikten.

Populair gezegd zou men de vooruitgang in de wiskundige beschouwing van het talstelsel kunnen samenvatten met de opmerking dat het Dedekind gewoon vijftien pagina's meer kostte om te leren tellen dan zijn achttiende-eeuwse collega's en dat Peano zoveel moeite had met tellen, dat hij daar een heel artikel voor nodig had. Met een dergelijke persiflage laten we buiten beeld dat deze mensen een dieper inzicht verschaften in het wezen van ons talstelsel. In de tijd dat zij daarmee bezig waren, werden dergelijke observaties gewaardeerd.

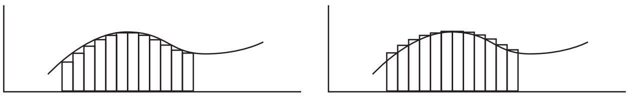
Analyse

De zuivering van wiskunde komt eveneens goed tot haar recht in het tweede voorbeeld, de analyse: de theorie van functies, hun raaklijnen en integralen. Het begrip functie was in de achttiende eeuw min of meer geïdentificeerd met een formule – waarbij die formule veelal betrekking had op een planeet – of kogelbaan. De Franse wiskundige J.L. Lagrange (1736-1813) was in 1797 de eerste die in zijn *Théorie des fonctions analytiques* poogde om de analyse in één wiskundige theorie te vangen. Zijn functies waren nog steeds formules, maar nu niet meer aan een kogelbaan gebonden. Dat waren wel het soort functies die Lagrange stiekem in zijn achterhoofd had, toen hij van zijn functies bewees dat ze lineair benaderbaar waren. Deze eis was onder ingenieurs en natuurwetenschappers herkenbaar, vanwege het feit dat deze hielp bij het oplossen van concrete problemen. Op basis van zijn definities toonde Lagrange aan dat zijn functies onder bepaalde condities differentieerbaar en integreerbaar waren.

De Göttinger wiskundige Bernhard Riemann (1826-1866) zette een volgende stap in dit proces van zuivering van de analyse. In zijn colleges over dit onderwerp introduceerde hij functies als min of meer willekeurige afbeeldingen – los van een eventuele formule. Om de integraal te definiëren, keek Riemann naar de boven- en onderbenaderingen met rechthoekjes van het oppervlak onder de grafiek van de desbetreffende functie over een gegeven interval. Riemanns opvatting van integraal was abstract, maar in de abstractie was de achttiende-eeuwse opvatting van integraal nog zeer herkenbaar. De abstractie was gericht op een beter begrip van een klassiek onderwerp en was als zodanig ook nog bruikbaar in toepassingsgerichte gebieden. Tegen het einde van de negentiende eeuw werd de Riemann-integraal, bijvoorbeeld, onderwezen op een aantal polytechnische scholen.

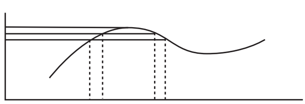
Het integraalbegrip dat Henri Lebesgue (1875-1941) in 1901 introduceerde, had niets meer te maken met concrete toepassingen. De zogenaamde Lebesgue-integraal diende uitsluitend om een wiskundig zuivere theorie te kunnen bieden, waarmee in één klap een zo groot mogelijke klasse van functies kon worden aangepakt – het begrip functie was inmiddels van een verzamelingtheoretische definitie voorzien en omvatte veel meer dan Lagrange in zijn onschuld voor ogen had gestaan. Degene die per se zijn handen vuil wilde maken aan de concrete berekening van een integraal, maakte in de theorie van Lebesgue gebruik van de stelling dat de Lebesgue-integraal gelijk was aan de Riemann-integraal – indien beide bestonden. Het hoofddoel van de theorie was gelegen in het funderen van de integratietheorie in de verzamelingenleer.

Kader 6.4: De Riemann- en de Lebesgue-integraal.



De integraal zoals Riemann die definieert, biedt een manier om tegen de oppervlakte onder een functie aan te kijken. Riemann gaat uit van een (positieve) functie $f(x)$ waarvan de grafiek gegeven is. Voor het gemak bekijken we het stuk van de functie tussen de $x = 1$ en $x = 3$. De oppervlakte onder dit gedeelte van de grafiek benadert hij door het stuk langs de x-as in stukjes te verdelen en bij elk stukje, zowel een hoogste als een laagste waarde van de functie te bepalen. De rechthoekjes die bij de laagste waarden van f horen vormen samen een onderschatting van de oppervlakte (zie het linker plaatje). De rechthoekjes die bij de hoogste waarde van f horen vormen samen een bovenschatting (zie het rechterplaatje). Riemann maakt nu in gedachten twee rijen: een rij van onderschattingen o_n en een rij van bovenschattingen b_n waarbij n aangeeft in hoeveel stukjes de x-as is verdeeld. Hij noemt de functie f integreerbaar als o_n en b_n beide naar dezelfde limietwaarde O gaan voor grote n. De limietwaarde O heet dan DE integraal van f over het stuk [1, 3].

De Riemann-integraal kan worden beschouwd als een theoretisch sterkere onderbouwing van een intuïtief (achttiende-eeuws) integraalbegrip. Het verband met de oppervlakte is helder: met de rechthoekjes-methode van Riemann kan de oppervlakte tot op een willekeurige nauwkeurigheid benaderd worden. Het belangrijke winstpunt is dat Riemann precies kan formuleren aan welke voorwaarden de functie moet voldoen opdat die Riemann-integreerbaar is.



De integraal van Henri Lebesgue (1875-1941) daarentegen, is een zuiver theoretisch concept, waarin het idee van oppervlakte onder een grafiek niet meer zo concreet aanwezig is. Hij heeft het over een 'maat', waarbij je kunt denken aan een lengte- of oppervlaktemaat. Lebesgue verdeelt niet de x-as, maar juist de y-as in stukjes. Vervolgens kijkt hij voor welke x-waarden binnen [1, 3] de functie waarden aanneemt in die stukjes op de y-as. In het plaatje hierboven hoort bij het onderste van de twee segmentjes op de y-as bijvoorbeeld de twee aangegeven stukjes op de x-as. Lebesgue maakt vervolgens ook boven- en onderschattingen, maar neemt daartoe de maximale of minimale waarde van zijn stukjes op de y-as die hij vermenigvuldigt met 'de maat' van de verzameling bijbehorende x-waarden. De functies waar Lebesgue het over had, waren abstracter dan die van Riemann: in het artikel uit 1901 waarin Lebesgue zijn integraal introduceerde stond geen afbeelding – sommige functies die hij in gedachten had waren niet te schetsen.

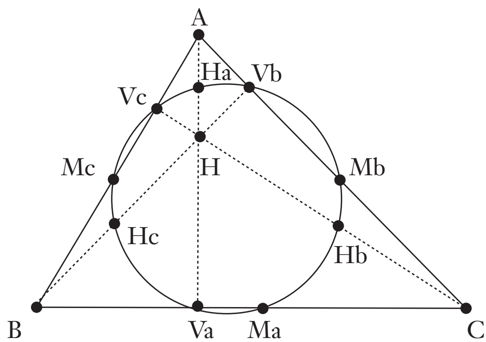
Zuivering revisited

Beide voorbeelden – het getalbegrip en de integraal – tonen naast een toenemende abstractie van wiskunde, tevens de steeds verdergaande pogingen om wiskunde los van de fysische werkelijkheid en empirie te funderen. De zuivere wiskunde was geenszins onmiddellijk het alom toegejuichte paradigma van een nieuwe stijl van wiskundebeoefening. De militaire academies haakten in een vroeg stadium af. Dat was bijvoorbeeld in Nederland rond 1860 het geval. In deze tijd ging het militair onderwijs eigen lesboeken produceren, die niet langer de heersende smaak in de zuivere wiskunde vertolkten.

Hoewel de zuivere stijl van wiskundebeoefening gestimuleerd werd door de toenemende belangstelling voor onderwijs, vond ze zeker niet in alle vormen van onderwijs haar plaats. Zo werd het analyseboek van Cauchy uit 1823 – dat door de huidige wiskundigen als een eerste stap in de richting van de moderne analyse wordt beschouwd – in eerste instantie met scepsis ontvangen. De veel oudere analyse van Lagrange was herkenbaarder en gold tot 1840 als de beste voorhanden zijnde tekst op dit gebied. Tegen het einde van de negentiende eeuw waren er echter internationaal opererende wiskundige gemeenschappen gegroeid, waarbinnen de zuivere wiskunde, zo niet de hoofdzaak, dan toch zeker een gewaardeerd onderdeel van de werkzaamheden uitmaakte. Zuivere wiskunde vond toen (tevens) los van het onderwijs plaats: het middel om beter en scherper te leren denken was tevens doel op zich geworden. De genoemde artikelen van Lebesgue en Peano bijvoorbeeld, verschenen in wiskundetijdschriften en waren in eerste instantie helemaal niet voor onderwijs bestemd.

De zuivering van wiskunde opende een wereld aan nieuwe mogelijkheden. De ontwikkeling van de verzamelingenleer was bijvoorbeeld onmogelijk geweest zonder het perspectief van zuivering. Hetzelfde gold voor de abstracte algebra –waarin structuren meer en meer willekeurig werden gesteld. Door de explosie aan nieuwe ideeën binnen de zuivere wiskunde zou men kunnen denken dat de wiskunde helemaal los was komen te staan van de werkelijkheid. Tot op zekere hoogte was dat ook zo. De zuivere wiskunde ging over gedachteconstructen. Lebesgue meende niet dat zijn integraalbegrip praktijkproblemen beter zou helpen oplossen (zie kader 6.4). Van de negenpuntscirkel (zie kader 6.5) zal ook niemand gedacht hebben dat het een praktische doorbraak zou opleveren. Deze wiskunde werd geschreven vanwege haar 'elegantie', met een beroep op verstandsveredeling. Toch was wiskunde niet alleen maar theoretisch. Een cultuurgeschiedenis van wiskunde in de negentiende eeuw zou niet compleet zijn zonder aandacht voor toegepaste wiskunde.

Kader 6.5: De cirkel van Feuerbach.



De negenpuntscirkel werd bekend door het werk van Karl Feuerbach (1800-1834). In een van zijn publicaties bewees Feuerbach de stelling dat voor een driehoek ABC (zie afbeelding) geldt: de middenpunten van de zijden (Ma, Mb en Mc), de voetpunten van de hoogtelijnen (Va, Vb en Vc) en de middens (Ha, Hb en Hc) van de lijnstukken door het hoogtepunt (H) en de hoekpunten liggen op één cirkel. De betreffende cirkel heet de negenpuntscirkel van driehoek ABC, of ook wel de cirkel van Feuerbach.

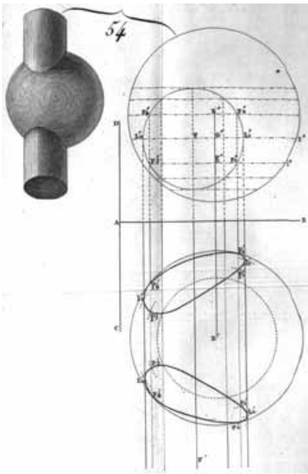
6.4 TOEGEPASTE WISKUNDE

Aan het eind van de negentiende eeuw waren er nog maar weinigen die zowel op het gebied van zuivere als toegepaste wiskunde vruchtbaar opereerden, maar vrijwel de gehele negentiende eeuw waren wiskundigen zowel met zuiver als met toegepast werk bezig. De scheidslijn tussen zuivere en toegepaste wiskunde was niet altijd even scherp. Zo waren er wiskundigen die mechanica tot de toegepaste wiskunde rekenden, maar er waren er ook die mechanica zuivere wiskunde noemden.

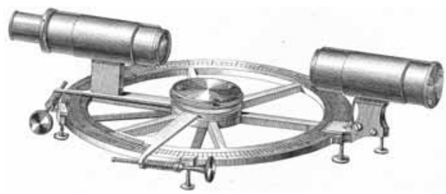
De zuivering van wiskunde ging gepaard met de opkomst van de toegepaste wiskunde. Was de achttiende-eeuwse gemengde wiskunde in essentie wiskunde geweest, nu kwam ze los te staan van het wezenlijke wiskundig denken dat in de zuivere wiskunde werd bedreven – eerst in de negentiende eeuw ontstond dus een zuivere wiskunde die ergens op kon worden toegepast. De zuivere wiskunde werd niet alleen onderwezen omdat het een zuivere denkvorm betrof. Zeker binnen de technische opleidingen was de universele toepasbaarheid van de abstracte theorie een reden om de zuivere wiskunde in het curriculum op te nemen. Ook veel universiteiten zagen wiskunde op de eerste plaats als hulpwetenschap. Daarin kwam pas tegen het einde van de negentiende eeuw verandering.

De zuivere wiskunde vond aan de technische opleidingen haar vervulling in de beschrijvende meetkunde. Dit vak werd geprezen vanwege de grote vormende waarde voor de toekomstige ingenieur. De ingenieursopleidingen boden een inleiding op de meetkunde, algebra en analyse om eigenschappen van gecompliceerde objecten en hun projecties te kunnen beschrijven. Daarmee leerde de student technische tekeningen maken en lezen: de beschrijvende meetkunde diende dit aspect van het technisch ontwerpproces. Daarnaast koesterden opleidingen de wiskundige inleiding die nodig was om tot het zinvol gebruik van de beschrijvende meetkunde te komen. De vormende waarde van die inleiding zou de toekomstige ingenieur in staat stellen om op een verstandige manier nieuwe mogelijkheden op waarde te schatten.

Kader 6.6: Beschrijvende meetkunde.



Figuur 6.1: Plaat VI van Lacroix uit *Éléments* (1822).



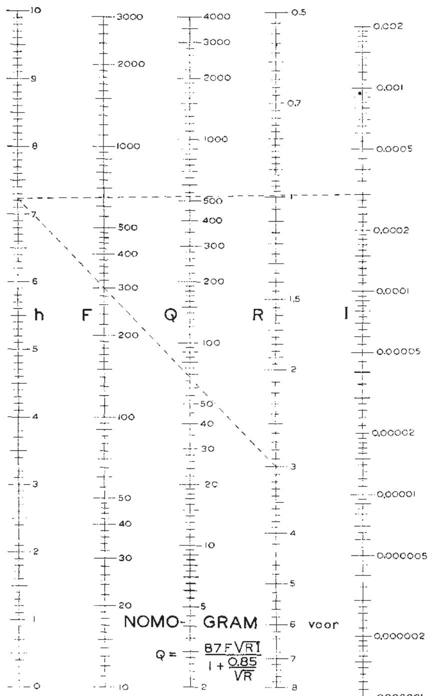
Figuur 6.2: Afbeelding uit *Regtlijnig Teekenen* (1864) van P.J.H. Baudet.

Beschrijvende meetkunde was een vakgebied dat de technisch ontwerper hielp bij het maken van natuurgetrouwe afbeeldingen van machines. Die afbeeldingen deden dienst bij de bouw, onderhoud, of uitleg over het functioneren van een apparaat. Daarnaast waren velen ervan overtuigd dat de exact meetkundige wijze waarop de beschrijvende meetkunde aan de technische opleidingen werd onderwezen, de toekomstige ingenieur zou helpen een verstandig mens te worden. Figuur 6.1 toont een oefening uit de *Éléments de Géométrie Descriptive*, de vijftiende editie van een veel gebruikt leerboek op dit gebied van de Franse wiskundige S.F. Lacroix. Een ruimtelijke voorstelling van een cilinder die door een bol steekt, wordt in twee aanzichten getekend. Figuur 6.2 toont het einddoel van de cursus beschrijvende meetkunde: een hoekmeetinstrument, ten behoeve van een lesboek, volgens de regels der beschrijvende meetkunde correct weergegeven.

Men kan zich afvragen in hoeverre de zuiver wiskundige inleiding voor de ingenieurs de rol speelde van terreinafbakening. Aan het einde van de eeuw moesten ingenieurs de wiskundige taal beheersen, anders werd hun werk niet serieus genomen. In pleidooien voor staatsfinanciering van technische hogescholen werd steevast de suggestie gewekt dat een stevige wiskundige basis voor ingenieurs noodzakelijk was. Het waren immers de ingenieurs die de natie haar technische innovatiekracht bezorgden, zo was de redenering. Toch was een land als het Verenigd Koninkrijk, waar technici veelal *selfmade men* waren, absoluut niet achter op technisch gebied. Er was soms ook sprake van een haat-liefdeverhouding tussen de ingenieursopleidingen en de zuivere wiskunde. Rond 1890 werd aan sommige Duitse technische scholen de wiskunde stevig ingeperkt. In elk geval bestond er voor de militaire ingenieurs voor (grofweg) 1860 geen technische noodzaak die een inleiding in de zuivere wiskunde rechtvaardigde. Een inleiding in de zuivere wiskunde maakte het natuurlijk wel mogelijk dat de ingenieurs van de korpsen ook andere formules (dan die ze bij hun werk gebruikten) konden interpreteren. Dat werd zinvol toen rond het midden van de negentiende eeuw bij de artillerie ook met meer gestandaardiseerde lopen en kogels werd gewerkt, zodat formules (voor de plaats waar een kogel terecht zou komen) ook daadwerkelijk een beter resultaat opleverden dan gissingen van iemand die het geschutsstuk kende. Eind negentiende eeuw werd het gebruikelijk dat er vanuit de voorste linies bepaald werd waar de artillerie, veilig in de achterste linies opgesteld, moest bombarderen. De formules die de artilleristen gebruikten, hielden (over grote afstanden) rekening met windrichting en dergelijke factoren – dat kostte erg veel rekenwerk. Om snel een goede benadering van de uitkomst te hebben, gebruikte men volgens meetkundige principes vervaardigde rekenwerktuigen, zogenaamde nomogrammen. De negentiende-eeuwse militaire ingenieur was tijdens zijn studie op deze vernieuwingen voorbereid en was in staat om nomogrammen te ontwerpen en hanteren.

In de vorige paragraaf werd al opgemerkt dat theoretici (zoals Dedekind) aan technische hogescholen hun werkplek vonden. Andersom verschafte de zuivere wiskunde het beroep van ingenieur aanzien. In die oppervlakkige zin stimuleerden de toegepaste en zuivere wiskunde elkaar. Daarnaast vond er een vakinhoudelijke kruisbestuiving plaats. Zo leverden bijvoorbeeld Joseph Fourier (1768-1830) in zijn *Théorie analytique de la chaleur* (1822) en George Green (1793-1843) in diens *Essay on the application of mathematical analysis to theories of electricity and magnetism* (1828, met een belangrijke herdruk in 1846) met hun toegepaste werk tevens belangrijke theoretische bijdragen aan de oplossing van partiële differentiaalvergelijkingen – en daarmee voor de discussie over wat er verstaan diende te worden onder een oplossing van zo'n vergelijking. De stoommachine van James Watt (1736-1819) stimuleerde de opkomst van het vakgebied der kinematica (de meetkundige beschrijving van machinale bewegingen), die op haar beurt weer impulsen verschafte aan de meetkunde.

Kader 6.7: Nomografie.



Voorbeeld: Voor F = 300, R = 3 en I = 0.0003 is Q ≈ 525

fig. 85.

De nomografie was een vakgebied dat was gebaseerd op ontdekkingen in de projectieve meetkunde. Het doel van het vak was, schalen te construeren die gecompliceerde berekeningen konden vereenvoudigen. Hierboven een voorbeeld uit het twintigste-eeuwse lesboek van N.D. Haasbroek. Gegeven de waarden van F, R en I is de waarde van Q uit te rekenen met behulp van de gegeven formule. Door het nomogram te gebruiken kon men relatief eenvoudig (en snel) een benadering voor Q vinden. In het voorbeeld is voor F, R en I respectievelijk 300, 3 en 0,0003 genomen. Door nu op de schaal voor F het punt 300 te nemen en dat te verbinden met het punt 3 op schaal voor R krijgen we een snijpunt op de hulpschaal h (uiterst links). Door nu de lijn te trekken tussen dit punt op de hulpschaal en het punt 0,0003 op de I-schaal vinden we een snijpunt op de schaal Q: ongeveer 525.

De toegepaste wiskunde ontwikkelde zich in de loop van de negentiende eeuw tot een eigen vakgebied. Die ontwikkeling laat zich onder andere illustreren aan de hand van de standaardwerken die op het gebied van de toegepaste wiskunde verschenen. Vanaf 1898 verscheen de *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* – een project dat eerst in 1935 werd afgerond. Van meet af aan waren daarin delen op het gebied der zuivere en toegepaste wiskunde begroot. Een teken dat de twee deelgebieden, hoewel nog steeds met elkaar verbonden, tegen het eind van de negentiende eeuw volwassen waren geworden.

Het belangrijkste onderdeel van de toegepaste wiskunde was zonder meer de mathematische fysica. De mathematische fysica werd gedurende de negentiende eeuw onderwerp van een steeds verder voortschrijdende mathematisering. Mathematisch fysici volstonden met een wiskundige beschrijving van waargenomen fenomenen, zonder dat ze zich druk leken te maken over achterliggende oorzaken of het vinden van een allesomvattende theorie. Dit kwam bijvoorbeeld sterk tot uitdrukking in het werk van Heinrich Hertz (1857-1894), die in zijn *Prinzipien der Mechanik* (1894) een axiomastelsel ten grondslag legde aan de mechanica. Daarbij stelde hij dat de belangrijkste eis aan zijn axioma's was dat ze hem hielpen een systeem te beschrijven dat aan realiteitseisen voldeed. Andere axioma's zouden volgens Hertz ook tot een met de waarnemingen in overeenstemming zijnde mechanica kunnen leiden – in die zin waren de axioma's, zoals in de wiskunde, willekeurig – maar zijn axioma's beschreven het meest effectief het door hem gekozen gezichtspunt.

Het standpunt dat Hertz hier expliciet koos, was gaandeweg de negentiende eeuw mogelijk geworden. De willekeur van de axioma's werd door een vroeg negentiende-eeuws wiskundige als Fourier niet beleden, maar in zijn werk aan warmteverloop maakte ook hij zich niet druk om de achterliggende structuur van de schepping. Of warmte nou bestond uit deeltjes of trillingen, Fourier beschreef met zijn formules hoe warmtegeleiding in objecten verliep. De belangrijkste winst van hun theorie zagen Fourier en Hertz in het feit dat er een voorspellende waarde vanuit ging. Zij trachtten niet langer door te dringen tot de werkelijkheid die God had geschapen; ze namen genoegen met het gedrag van een klein deeltje daaruit in formules te vangen. Dat men op deze wijze fysica kon bedrijven was geenszins vanzelfsprekend, aangezien een van de belangrijkste drijfveren (en legitimaties) van fysisch onderzoek kennis van de Schepping was – waarbij het op zich niet verkeerd werd gevonden om te veronderstellen dat de achterliggende structuur van de Schepping wiskundig beschreven kon worden. Het behoeft dan ook geen verbazing dat Fourier door collega-fysici met argusogen werd bekeken. Voor veel fysici waren de formules van Fourier geen fysica, omdat er geen uitspraken werden gedaan over 'de natuur' van warmte. Ook Hertz trof sceptische collegae, maar dezen achtten de mathematisering op zich niet verkeerd, doch meenden dat een aanspraak op werkelijkheid voor de fysica bereikbaar was. De kentering in het denken over fysica maakte het vak suspect in de ogen van veel religieuze negentiende-eeuwers.

Naast de mathematische fysica was er een nieuwe tak van wetenschap die meende waargenomen verschijnselen wiskundig te kunnen beschrijven. In de negentiende eeuw ontstonden, naast de zuivere wiskunde, tevens de sociale wetenschappen. Die laatste gebruikten vooral een relatief nieuw aandachtsveld van de wiskunde, namelijk de statistiek. De ontwikkeling van de statistiek is een geschiedenis apart en verdient zodoende afzonderlijk aandacht.

6.5 STATISTIEK

Het zuiveringsproces dat zich binnen de wiskunde voltrok, was er vooral op gericht om wiskunde als de ultieme zekerheid neer te zetten. Wiskundige resultaten werden beschouwd als een goddelijke gave, de beste vorm van zekerheid die de mens kon bereiken in die delen van Europa waar het Verlichtingsdenken getemperd werd door religieuze gevoelens. Wiskunde werd beschouwd als de ultieme vorm van Rede, daar waar men religie los kon zien van wetenschap. Toch waren er, juist ook door de zuivering van wiskunde, een flink aantal gebieden waarover de wiskunde helemaal geen zekere uitspraken kon doen. De statistiek – het gebied van de wiskunde dat uitspraken doet over die situaties waar zekerheid niet aanwezig is – zou in de negentiende eeuw beginnen aan een bloeiperiode.

De statistiek kent twee achttiende-eeuwse voorgangers: de staatsbeschrijving en de politieke rekenkunde. In de staatsbeschrijving werden numerieke gegevens over een staat gehanteerd om de staat te karakteriseren en eventueel te vergelijken met andere staten. Daarbij gebruikte men gegevens zoals de oppervlakte die in beslag werd genomen door landbouwgrond (en de opbrengst), het aantal mijnen en de grootte van het leger. In de politieke rekenkunde hield men zich overwegend bezig met de kwantificering van maatschappelijke processen. Er werden bijvoorbeeld sterftetabellen opgesteld waarin naar wetmatigheden werden gezocht om de verkoop van lijfrenten (een manier voor een staat om snel geld te genereren) zo lucratief mogelijk te maken. In de negentiende eeuw zetten de sociale wetenschappen die zoektocht naar wetmatigheden voort, gesteund door nieuwe en scherper geformuleerde statistische methoden van wiskundige origine. Beroemd werd de Gentse wiskundige en astronoom Adolphe Quetelet (1796-1874) die een theorie opstelde van de gemiddelde mens. Uitgaande van een 'nationale aard' berekende hij cijfers die een indicatie vormden voor de gemiddelde criminaliteit van de Nederlander en de neiging tot zelfmoord van de Franse stedeling. Zijn werk was niet onomstreden in een tijd dat God beschikte.

Wiskundigen kwamen niet zomaar terecht op het terrein van de statistiek. Sinds de zestiende eeuw hielden wiskundigen zich al bezig met waarschijnlijkheidsrekening. De waarschijnlijkheidsrekening ging vooral over kaart- en dobbelspelen. De theorie daarvan was gedurende de zeventiende en achttiende eeuw ontwikkeld, met als onuitgesproken achtergrondgedachte dat het een kwantificering betrof van het handelen dat de redelijke mens intuïtief volbracht. Zo werd bijvoorbeeld het begrip 'verwachtingswaarde van de winst bij een spel' opgevat als het bedrag dat een redelijk mens bereid was te betalen om aan een dergelijk spel te mogen meedoen.

Voor de wiskundigen bleek de waarschijnlijkheidsrekening uitstekende diensten te kunnen bewijzen bij foutenschattingen in waarnemingen. Zowel landmeters als (experimenteel) natuurwetenschappers werden met meetfouten geconfronteerd. Die onderwerpen kregen dan ook aandacht, bijvoorbeeld bij het rekenwerk dat benodigd was bij de diverse karteringsoperaties die in het laat achttiende-eeuwse, vroeg negentiende-eeuwse Europa werden ondernomen.

In de loop van de negentiende eeuw werd de theorie der foutenschattingen in rap tempo verder ontwikkeld. P.S. Laplace (1749-1827) publiceerde in 1812 het werk *Théorie Analytique des Probabilités*, dat gedurende de negentiende eeuw de visie op de theorie zou bepalen. Hij beschouwde een serie metingen (met meetfouten) als het resultaat van een toevallige verdeling van fouten rond een bestaand gemiddelde. Met behulp van de waarschijnlijkheidsrekening kon dan een 'waarschijnlijke' waarde van zo'n gemiddelde worden uitgerekend – precies die 'echte' waarde die de natuurwetenschapper of landmeter interesseerde. In de loop van de negentiende eeuw ging ook de theorie van foutenschattingen een rol spelen in het technisch onderwijs: de normale verdeling en de methode der kleinste kwadraten werden standaard onderdeel van het curriculum van de technische studies.

Het lag in de lijn der verwachting dat de statistiek in de experimentele natuurwetenschap en de techniek aan belang zou winnen. Opvallender is echter dat juist in de negentiende eeuw ook de overheidsstatistiek en de verzekeringsstatistiek een hoge vlucht nemen. Op zich was de wiskundige theorie daar bepaald minder gesofisticeerd dan de theorie die nodig was voor de foutenanalyse; veelal was die theorie zelfs al eeuwen bekend. Betreffende de theorie der levensverzekeringen was het in de achttiende eeuw bijvoorbeeld beduidend lastiger om betrouwbare sterftetabellen te krijgen, dan om een boek te vinden waarin de premieberekeningen stonden uitgelegd. Toch werd door de meeste levensverzekeringsmaatschappijen eerder een concurrerende dan een op berekeningen gebaseerde premie gevraagd. Dat had te maken met de heersende cultuur. Zowel kopers als aanbieders van verzekeringen beschouwden hun winst of verlies op een dergelijke onderneming vooral als een speling van het door God bepaalde lot.

Hierin kwam in de negentiende eeuw verandering. De wiskundige zekerheid kon het verzekeringsbedrijf helpen om de ongelukkige zweem van het gokken rond de verzekeringsbranche weg te nemen. Een aantal Europese overheden en particuliere organisaties zetten zich in om de verzekeringsbranche te propageren als een zegen, die (mathematisch zeker) houvast kon bieden in bange tijden. Hun redenering was dat verzekeringen zouden helpen voorkomen dat mensen in armoede zouden vervallen. Armoede was een van de politieke risicofactoren in het negentiende-eeuwse Europa. Daarbij was men van mening dat het geld dat naar de premiebetalingen ging, niet aan drank of gokken kon worden uitgegeven – twee aanstootgevende slechte gewoonten die veel armen erop na hielden. Premiebetaling leidde dus tot afname van slechte gewoonten en zou daarmee ook een positief effect hebben op het moreel van de bevolking. In veel landen bestonden er zodoende organisaties (al dan niet op overheidsniveau) die propaganda voerden om het vertrouwen in de verzekeringssector leven in te blazen. In een aantal Europese landen werd wetgeving afgekondigd die controle van de premieberekening verplicht stelde, gekoppeld aan een officiële erkenning. Dat opende de mogelijkheid voor het beroep van actuaris of verzekeringswiskundige. Tegen het einde van de negentiende eeuw vormden de verzekeringswiskundigen een bloeiende beroepsgroep met in veel landen een eigen vereniging en tijdschrift. In de jaren 1890 vonden de eerste internationale congressen van verzekeringswiskundigen plaats.

Statistieken betreffende leger, landopbrengsten en productie waren vanwege de staatsveiligheid niet altijd vrij toegankelijk. De achttiende-eeuwse Duitse *Kameralistiek* bijvoorbeeld beriep zich veelal op geheimhouding van gegevens. In de loop van de negentiende eeuw zou juist de overheidsstatistiek een hoge vlucht nemen. Liberalen meenden dat de statistische gegevens een beter doordacht regeringsbeleid mogelijk maakten. De kwantitatieve statistieken zoals wij die tegenwoordig kennen, gingen steevast gepaard met een kwalitatieve beschouwing. In Frankrijk en Nederland richtte de overheid statistische bureaus op. In het Verenigd Koninkrijk ontstonden particuliere organisaties die zich bezig hielden met het verzamelen van statistische gegevens. De bemoeienis van wiskundigen met deze organisaties was sterk afhankelijk van de heersende cultuur. In Frankrijk was het statistisch bureau vrijwel exclusief het terrein van wiskundigen, terwijl het Nederlandse statistische bureau nauwelijks wiskundigen onder zijn gelederen telde.

6.6 TOT SLOT

In retrospectief kan worden gesteld dat de wiskunde in de negentiende eeuw een zwaar stempel ging drukken op de westerse samenleving. Binnen het onderwijs begon de wiskunde – met een claim op een vormende waarde – aan een opmars die maakte dat aan het einde van de negentiende eeuw vrijwel iedereen met het rekenonderwijs werd geconfronteerd en velen via het onderwijs nader kennis maakten met wiskunde. Aan het eind van de eeuw was wiskunde een vak dat om haar zelf bestudeerd werd; een bloeiend vakgebied, dat het nationale gevoel versterkte op internationale congressen, met internationale tijdschriften en via prestigieuze genootschappen en academies. Als statistische raadgever speelde wiskunde een rol in de opkomende sociale wetenschappen, het verzekeringswezen en (in veel Europese landen) zelfs bij de overheid. Hoewel al deze ontwikkelingen eerst in de twintigste eeuw tot volle wasdom zouden komen, zijn de eerste aanzetten steevast in de negentiende eeuw te ontdekken. Genoemde ontwikkelingen droegen niet op de laatste plaats bij aan de status van het vakgebied.

Dit hoofdstuk begon met de opmerking dat er twee belangrijke ontwikkelingen waren die de geschiedenis van wiskunde in de negentiende eeuw karakteriseerden. De eerste was de opkomst van de zuivere wiskunde. De tweede belangrijke ontwikkeling was de institutionalisering van de nieuwe wiskunde. Binnen de faculteiten der wis- en natuurkunde, nationale academies, genootschappen en tijdschriften bloeide tegen het eind van de negentiende eeuw een zich verder specialiserende (zuivere en toegepaste) wiskunde. De zuivere wiskunde ging zich meer en meer om abstracte structuren bekommeren en trachtte het vakgebied los van empirie en intuïtie te funderen. De toegepaste wiskunde maakte zich los van de fysische waarheidsclaims. Wiskundigen kwamen om de paar jaar bijeen op internationale congressen en publiceerden in internationale tijdschriften. Het was nationalistisch getinte trots die deze opmars ondersteunde. Het was tevens een rotsvast vertrouwen in de vooruitgang die wetenschap en techniek, wiskunde in het bijzonder, zouden brengen, die nationale overheden en particulieren deed besluiten dergelijke initiatieven te steunen.

De problemen die werden opgeroepen door pogingen tot fundering van wiskunde in zichzelf zouden uiteindelijk tot uitbarsting komen in de grondslagencrisis. Maar dat is een verhaal apart en speelt zich af in een andere eeuw.

LITERATUUR

Alberts, G., *Jaren van berekening*, Amsterdam University Press, 1998.

Ausejo, E. & Hormigon, M. (eds.), *Messengers of Mathematics*, Madrid, Siglo XXI, 1993.

Beckers, D., 'Untiring labor overcomes all!': the history of the Dutch Mathematical Society in comparison to its various counterparts in Europe, in *Historia Mathematica* 28, 2001, pp. 31-47.

Beckers, D., *'Het despotisme der Mathesis'. Opkomst van de propaedeutische functie van de wiskunde in Nederland, 1750-1850*, Hilversum, Verloren, 2003.

Berkel, K. van (red.), *Het oude Instituut en de nieuwe Akademie*, Amsterdam, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 2000.

Blom, K., Van de Acten van Bekwaamheid, in Goffree, F., Hoorn, M. van & Zwaneveld, B. (red.), *Honderd jaar Wiskunde-onderwijs*, Leusden, Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 2000.

Cullen, M.J., *The Statistical Movement in Early Victorian Britain*, New York, Harvester, 1975.

Gerritsen, W.P. (red.), *Het Koninklijk Instituut (1808-1851) en de bevordering van wetenschap en kunst*, Amsterdam, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen, 1997.

Gigerenzer. G. (ed.), *The empire of chance: how probability changed science and everyday life*, Cambridge University Press, 1989.

Gispert, H., Les débuts des sociétés mathématiques en Europe, in *Gazette des Mathématiciens* 53, 1992, pp. 25-31.

Grattan-Guinness, I. (ed.), *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences*, Londen, Routledge, 1994.

Jahnke, H.N., & Otte, M. (eds.), *Epistemological and Social Problems of the Sciences in the Early Nineteenth Century*, Dordrecht/Boston/Londen, Reidel, 1981.

Klep, P.M.M. & Stamhuis, I.H. (red.), *The statistical mind in a pre-statistical era*, Amsterdam, Aksant, 2002.

Krüger, L., Daston, L.J., Heidelberger, M. (ed.), *The probabilistic revolution*, Cambridge (MA), MIT Press, 1989.

Lenders, J.H.G., *De burger en de volksschool*, Nijmegen, SUN, 1988.

Lintsen, H.W., Bakker, M.S.C., Homburg, E., Lente, D. van, Schot, J.W. & Verbong, G.P.J. (red.), *Geschiedenis van de Techniek in Nederland*, Zutphen, Walburg pers, 1992-1995.

Pycior, H.M., *Symbols, Impossible numbers and Geometric Entanglements*, Cambridge University Press, 1997.
Richards, J.L., *Mathematical visions*, Boston, Academic Press, 1988.
Rietbergen, P.J.A.N., *Europe: A cultural history*, Londen/New York, Routledge, 1998.
Schmale, W. & Dodde, N.L., *Revolution des Wissens? Europa und seine Schulen im Zeitalter der Aufklärung (1750-1825)*, Bochum, Riedel, 1991.
Struik, D.J., *Geschiedenis van de wiskunde*, Utrecht, Het Spectrum, 2001.
Wachelder, J.C.M., *Universiteit tussen vorming en opleiding*, Hilversum, Verloren, 1992.

7
De wiskunde in de eerste helft van de twintigste eeuw

Teun Koetsier

7.1 INLEIDING

Lang geleden dacht men dat de aarde, afgezien van bergen en dalen, plat was. Al in de Oudheid realiseerde men zich echter dat die opvatting in strijd is met de waarnemingen. Zo is soms van schepen aan de horizon slechts de bovenste helft zichtbaar en staat de Poolster in Egypte lager dan in Athene. Dit alles wijst op een kromming van het aardoppervlak. De Grieken formuleerden naar aanleiding van dergelijke constateringen een nieuwe theorie: de aarde is een bol, die alleen maar plat lijkt omdat zij in verhouding tot onze afmetingen zo groot is. We zien hier een voorbeeld van een gang van zaken die in de wiskunde vaker voorkomt. De menselijke geest is in staat om een vorm, een structuur of een patroon in het dagelijks leven om ons heen te herkennen en te definiëren, om vervolgens diezelfde vorm of structuur te gebruiken om de werkelijkheid op een heel ander niveau te beschrijven. Dat andere niveau kan de wereld van het reusachtig grote – dat van de hele aarde of zelfs de hele kosmos – maar ook die van het heel erg kleine zijn: bijvoorbeeld de wereld van de elementaire deeltjes.

In de twintigste eeuw heeft de wiskunde zich ontwikkeld tot de wetenschap der wiskundige structuren. Elke wiskundige structuur die zich precies laat definiëren en daarmee toegankelijk wordt voor abstract onderzoek, komt in aanmerking voor een wiskundige behandeling. De structuur wordt losgemaakt uit een eventuele concrete context en daarmee is in principe de mogelijkheid gegeven diezelfde structuur in een heel andere concrete context toe te passen. De twintigste-eeuwse wiskunde is op die manier als het ware een gereedschapskist geworden waaruit elke andere wetenschap kan putten. Niet alleen in de kosmologie en de kwantumfysica en in het algemeen in de natuurwetenschap, maar ook bij de studie van het groepsgedrag van mensen, bijvoorbeeld in de economie, speelt de wiskunde een belangrijke rol. Het arsenaal van onderzochte structuren is reusachtig, evenals trouwens het aantal onopgeloste kwesties en daarmee de dynamiek van de wiskunde. Met een verrekijker en een microscoop maak je dat wat onzichtbaar is zichtbaar. Met de wiskunde doe je eigenlijk iets dergelijks; met een wiskundig model wordt soms zelfs het ogenschijnlijk onvoorstelbare voorstelbaar.

Iedere eeuw wordt geboren uit de eeuw die aan haar voorafgaat. De twintigste eeuw is niet anders; terugblikkend is het evident dat de wiskunde van de negentiende eeuw zwanger was van een spectaculaire toekomst. Ik zal dat laten zien aan de hand van een tweetal aan de meetkunde ontleende voorbeelden van negentiende-eeuwse ontwikkelingen, die op deze manier vooruitwezen naar de twintigste eeuw.

7.2 DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE

In de negentiende eeuw was het idee van de bolvormige aarde al geruime tijd gemeengoed. Het heelal werd gezien als een oneindige ruimte, waarbinnen zich bij benadering bolvormige hemellichamen bewogen volgens wetten die men goed begreep. Überhaupt was de hemelmechanica een van de paradepaardjes van de natuurwetenschap. Nog steeds wordt die klassieke mechanica onderwezen en toegepast bij bijvoorbeeld de berekening van de baan van een satelliet om de aarde. Het heelal werd in de negentiende eeuw gezien als een driedimensionale euclidische ruimte. De structuur van het 'lege' heelal werd beschreven met behulp van de inhoud van het boek *Elementen*, van de hand van de wiskundige Euclides (zie hoofdstuk 2). De *Elementen* gaat over punten die geen afmetingen hebben, breedteloze lijnen en vlakken zonder dikte. Er wordt verondersteld dat er door elk tweetal punten precies één rechte lijn gaat, dat rechte lijnen willekeurig ver recht verlengd kunnen en dat er bij elk tweetal punten precies één cirkel is die door het ene punt gaat en het andere punt als middelpunt heeft. Dit zijn allemaal veronderstellingen waarvan de correctheid op kleine schaal op een vel papier of op een schoolbord aannemelijk gemaakt kan worden, zoals uit hoofdstuk 2 al bleek. Onder meer uit die veronderstellingen kan men afleiden dat rechte lijnen de eigenschap hebben de kortste afstand tussen twee punten te zijn. Voor driehoeken geldt bij Euclides: 'De som van de hoeken in een willekeurige driehoek is 180 graden'. Die stelling impliceert dat als ik een willekeurig drietal punten in de ruimte heb en ik de hoeken van de driehoek die gevormd wordt door die punten meet, ik een totaal van 180 graden krijg. Hoewel wiskundigen van mening waren dat je de waarheid van die stelling gewoon kon inzien zonder experimenten uit te voeren, werd de stelling in de praktijk van de landmeetkunde voortdurend bevestigd. Immers, het licht volgt de kortste afstand tussen twee punten en ik kan dus met landmeetkundige apparatuur ook de hoeken van grote driehoeken meten. De som was – afgezien van kleine meetfouten – altijd 180 graden.

Eén van de grootste Duitse wiskundigen ooit, Carl Friedrich Gauß (1777-1855), vanaf 1807 professor in de astronomie en directeur van de sterrenwacht in Göttingen (een stadje in midden-Duitsland) was de eerste die zich afvroeg of je bij driehoeken die nog veel groter zijn dan die uit de landmeetkundige praktijk, ook een hoeksom van 180 graden zult vinden. Dit was een revolutionair idee. Het betekent dat Gauß zich realiseerde dat het niet vanzelf spreekt, dat in het heelal op zeer grote schaal de euclidische meetkunde ook correct is. Net zoals de menselijke geest zich kan voorstellen dat een appel en de planeet Neptunus dezelfde bolvorm hebben, kan de menselijke geest zich voorstellen dat de euclidische stelling van Pythagoras ook geldt voor rechthoekige driehoeken die gevormd worden door drie zeer ver van elkaar gelegen sterren. De vraag of deze voorstellingen ook kloppen, was vòòr Gauß wel eens opgekomen maar nooit serieus genomen. Gauß was echter tot de ontdekking gekomen dat men zich als wiskundige niet alleen een ruimte kan voorstellen zoals die in *Elementen* wordt beschreven, maar ook een ruimte waarin allerlei andere dingen waar zijn, bijvoorbeeld dat de som van de hoeken van een driehoek altijd kleiner is dan 180 graden. Hij noemde zo'n ruimte 'niet-euclidisch' en hij hield zijn ontdekking geheim. Later schreef Gauß dat hij haar geheim had gehouden, omdat hij geen zin had in 'het geschreeuw van de Beothiërs'.[1] In die tijd werd een filosoof nog verondersteld om een systeem te hebben. In die systemen kwam altijd de euclidische meetkunde naar voren als zijnde De Wetenschap van de ruimte. Als er maar één ruimte is, kan er dus ook maar één meetkunde zijn en dat was natuurlijk de euclidische. Gauß had met die geheimhouding dus wel een beetje gelijk. De filosofen waren stellig allemaal over hem heen gevallen, omdat zo'n niet-euclidische ruimte – als je er niet aan bent gewend – een hele wonderlijke structuur heeft. Niet alleen is de hoeksom in een driehoek altijd kleiner dan 180 graden, maar ook geldt dat door een gegeven punt altijd meerdere rechte lijnen gaan die een gegeven rechte lijn niet snijden. Verder zijn er in zo'n niet-euclidische ruimte geen rechthoeken en vierkanten et cetera. Als je een vierhoek maakt met drie rechte hoeken, dan wordt de vierde hoek altijd kleiner dan 90 graden. Men zegt wel dat zo'n niet-euclidische ruimte 'gekromd' is in vergelijking met een euclidische. Op kleine schaal is het verschil met een euclidische ruimte overigens heel klein. Als het heelal niet-euclidisch is, dan lijkt de situatie dus enigszins op de platte aarde versus de bolvormige aarde: een bolvormige aarde is locaal plat en een gekromde, niet-euclidische ruimte kan locaal euclidisch zijn. In het geval van het heelal is het echter ingewikkelder, want we praten nu over een hele driedimensionale ruimte en niet langer over één oppervlak in die ruimte.

Hoe kwam Gauß bij die niet-euclidische ruimte? Welnu dat is een puur interne wiskundige ontwikkeling geweest. In *Elementen* wordt door Euclides de meetkunde axiomatisch opgebouwd. Dat wil zeggen dat Euclides begint met een aantal veronderstellingen over punten, rechte lijnen en cirkels in de ruimte. De daaropvolgende beweringen worden wel allemaal logisch afgeleid uit die veronderstellingen. In de Oudheid werden al die onbewezen uitgangspunten als onproblematisch beschouwd, op één na. Dat ene problematische uitgangspunt was het Vijfde Postulaat. Het Vijfde Postulaat is equivalent met de bewering die zegt dat door een gegeven punt dat niet op een gegeven rechte lijn ligt, altijd precies één rechte lijn gaat die de gegeven lijn niet snijdt. Het Vijfde Postulaat werd onder meer als problematisch beschouwd, omdat het als minder vanzelfsprekend werd beschouwd dan de andere onbewezen uitgangspunten. Men vond verder dat het Vijfde Postulaat eigenlijk de status van stelling zou moeten hebben, die op basis van de overige postulaten bewezen zou moeten kunnen worden. Deze laatste gedachte is de sleutel tot de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde. Het is namelijk zo dat een voor de hand liggende manier om te pogen het Vijfde Postulaat te bewijzen uit de overige postulaten, een poging tot een bewijs uit het ongerijmde is. Men zegt dan: stel het Vijfde Postulaat is niet waar, dat wil zeggen als ik een punt heb en een rechte lijn, dan is het aantal rechte lijnen door dat punt evenwijdig met de rechte lijn niet één, maar hetzij nul, hetzij meer dan één. Men kan laten zien dat op basis van de overige postulaten de optie 'nul' vervalt en uitgaande van de optie 'meer dan één' moet men dan proberen om een tegenspraak af te leiden. Op het moment dat dat zou lukken, heeft men het Vijfde Postulaat als stelling bewezen. Vele pogingen zijn ondernomen om op deze of een analoge wijze tot een tegenspraak te komen, uitgaande van de negatie van het Vijfde Postulaat. Die pogingen mislukten allemaal; men kon merkwaardige resultaten afleiden, maar geen tegenspraak. Gauß was de eerste die inzag dat al die merkwaardige resultaten een opvallend coherent geheel vormden en hij trok de conclusie dat de negatie van het Vijfde Postulaat samen met de overige definities, axioma's en postulaten geen tegenspraak maar een nieuwe, niet-euclidische meetkunde opleverde. In die niet-euclidische meetkunde is de som van de hoeken van een driehoek altijd minder dan 180 graden, zoals we boven reeds opmerkten. Onafhankelijk van Gauß kwamen later de Hongaar Bolyai en de Rus Lobachevski tot soortgelijke conclusies. Zij publiceerden hun resultaten wel, maar het duurde tot in de tweede helft van de negentiende eeuw voordat het idee van een niet-euclidische meetkunde in bredere wiskundige kring serieus werd genomen. In het bijzonder het wetenschappelijk en populariserend werk van de Duitser Felix Klein (1849-1925) droeg daartoe bij.

De gedachtegang van Gauß was volstrekt revolutionair. Tot in de negentiende eeuw was de meetkunde per definitie de theorie van de fysische ruimte en was er dus ook maar één meetkunde, omdat er één fysische ruimte is. Gauß zag al in dat de acceptatie van de niet-euclidische meetkunde leidde tot een heel nieuwe notie van wat meetkunde is: een meetkunde wordt gedefinieerd door een betrekkelijk willekeurig stelsel van axioma's waarin over het algemeen sprake zal zijn van punten, lijnen, vlakken et cetera, maar die meetkunde staat verder los van fysische punten, lijnen, vlakken en hun eigenschappen en kan daarmee best in strijd zijn. Het is een van de mooiste voorbeelden van een negentiende-eeuwse ontwikkeling die regelrecht naar de twintigste eeuw wijst: de meetkunde maakte zich los van de fysische ruimte en de wiskundigen realiseerden zich dat er vele meetkunden bestaan. En hoewel men er eerst nog vanuit ging dat de fysische ruimte een euclidische structuur heeft, realiseerde men zich in de eerste helft van de twintigste eeuw dat dat op kosmische schaal helemaal niet het geval is. Een uitdijend heelal kun je vergelijken met het oppervlak van een ballon die wordt opgeblazen met het hele grote verschil dat er buiten dat uitdijend heelal niet een ruimte is waarin de uitdijing plaats vindt. Er is geen ruimte 'buiten' het heelal, de hele notie 'buiten' heeft hier geen zin. Toch kan men wiskundig heel precies over zo'n uitdijend heelal praten.

7.3 MEERDIMENSIONALE MEETKUNDEN

Wederom is Göttingen de plaats van handeling. Nog steeds is het in Duitsland zo dat iemand die hoogleraar wil worden een soort tweede proefschrift dient te schrijven, een Habilitationsschrift. Een tweede voorbeeld van een in de negentiende eeuw ontdekte wiskundige structuur die als het ware de twintigste-eeuwse ontwikkelingen aankondigde, ontleen ik aan het Habilitationsschrift van Bernhard Riemann (1826-1866). Riemann hield daar in 1851 een voordracht over het onderwerp van dat Habilitationsschrift: *Over de hypothesen die aan de meetkunde ten grondslag liggen*. Deze beroemde rede gaf grote bekendheid aan het idee van meerdimensionale meetkunden.[2] Het was een ontwikkeling die in het verlengde lag van de introductie van de niet-euclidische meetkunde.

In een plat vlak kunnen we de positie van een punt ten opzichte van een referentiesysteem, bijvoorbeeld een assenstelsel, aangeven met behulp van twee coördinaten. Een vlak wordt om die reden een tweedimensionale ruimte genoemd. Het punt met coördinaten $x = 3$ en $y = 6$ vinden we door in de oorsprong O van het assenstelsel te beginnen, 3 eenheden van lengte richting de x-as te gaan en vervolgens 6 eenheden richting de y-as. Al in de zeventiende eeuw had men zich gerealiseerd dat met behulp van het idee van de coördinaten meetkundige objecten gerepresenteerd kunnen worden door algebraïsche objecten. Zo kan de rechte lijn die in een vlak de punten $x = 0, y = 0$ en $x = 3, y = 6$ verbindt, voorgesteld worden door de vergelijking $y = 2x$. In een driedimensionale ruimte hebben we met drie coördinaat-assen te maken: bijvoorbeeld een x-as, een y-as en een z-as. Een vergelijking als $z = 2x+3y$ stelt dan een plat vlak in de ruimte voor.

Riemann realiseerde zich dat als we de meetkunde los zien van de fysische ruimte, er geen enkele reden is om ons tot twee of drie dimensies te beperken. We krijgen een vierdimensionale ruimte door uit te gaan van een driedimensionale ruimte en een vierde coördinaat-as, bijvoorbeeld een u-as, te introduceren. Punten in die vierdimensionale ruimte worden dan voorgesteld door viertallen coördinaten. Bij elk van de waarden van de u-coördinaat hoort een driedimensionale deelruimte van de vierdimensionale ruimte: de verzameling van alle punten in de vierdimensionale ruimte met die u-coördinaat. En algebraïsche betrekkingen tussen de coördinaten worden, net als in het geval van lagerdimensionale ruimten, gebruikt om deelverzamelingen zoals punten, lijnen, vlakken en deelruimten te definiëren. Wij kunnen zo'n vierdimensionale ruimte wiskundig heel precies definiëren, maar we kunnen ons slechts ten dele een ruimtelijke voorstelling maken van meer dan driedimensionale ruimten. Analogieën helpen daarbij. Zo kan men zich voorstellen dat – net zoals een driedimensionale ruimte gezien kan worden als een stapel van oneindig vele platte tweedimensionale vlakken – een vierdimensionale ruimte kan worden gezien als een stapel van oneindig veel driedimensionale ruimten op elkaar. Natuurlijk kan men op deze manier ook vijf-, zes- of meerdimensionale ruimten definiëren en bestuderen. Zelfs is het mogelijk om heel precies oneindigdimensionale ruimten op deze wijze te behandelen.

Het voorbeeld van de niet-euclidische meetkunde en dat van de meerdimensionale meetkunden illustreren een belangrijke negentiende-eeuwse trend: de meetkunde, in zekere zin het onderdeel van de wiskunde dat traditioneel direct was gerelateerd aan de fysische ruimte, maakte zich op allerlei manieren van die ruimte los.

7.4 GÖTTINGEN: CENTRUM VAN DE WISKUNDIGE WERELD

In de laatste decennia van de negentiende en de eerste van de twintigste eeuw voltrok zich een tweede industriële revolutie. Het dagelijks leven veranderde drastisch. Naast de stoomtrein verschenen de fiets, de auto en het vliegtuig. Gas en elektriciteit kwamen op grote schaal ter beschikking en de telegraaf, telefoon en radio werden ontwikkeld. De Duitse en de Amerikaanse industrie domineerden. Op het gebied van de wetenschap liep Duitsland voorop en de wetenschap speelde, met name in Duitsland, een steeds belangrijkere rol in de industrie.

In het Duitse wetenschapsbeleid in de decennia rond de eeuwwisseling speelde de 'Ministerialdirektor' op het Pruisische 'Kultusministerium', Friedrich Althoff, een belangrijke rol. Een van zijn succesvolle projecten betrof het stadje Göttingen in het centrum van Duitsland. Gauß had er tot aan zijn dood gewoond en gewerkt. We hebben gezien dat ook Riemann er studeerde. Toch kon Göttingen niet in de schaduw van Berlijn staan. Dat alles ging veranderen toen Althoff in 1885 Felix Klein (1849-1925) naar Göttingen haalde met de opdracht om van Göttingen een belangrijk centrum van wiskundebeoefening te maken. Felix Klein was bij uitstek geschikt voor die taak. Hij was zesendertig jaar oud en een uitstekend wiskundige. Eerst even iets over zijn bijdragen aan de wiskunde. Klein was in 1872 hoogleraar geworden in Erlangen met een inaugurele rede over de meetkunde, die bekend staat als het *Erlanger Programm*. Klein betoogde in zijn rede dat met de verschillende meetkundige theorieën die men kende – naast de euclidische en de niet-euclidische meetkunde hadden er zich in 1872 meerdere meetkundige theorieën ontwikkeld – verschillende groepen van transformaties correspondeerden. Technisch gezegd: een meetkundige theorie betreft het geheel van invarianten onder een bepaalde groep van transformaties.[3] Dit was een heel interessant en vruchtbaar perspectief op de meetkunde. Om hiervan op een gebrekkige manier iets duidelijk te maken, beschouw ik even de vraag: wat is voor mij het wezen van de stad Amsterdam? In gedachten onderwerp ik de stad Amsterdam nu aan een aantal transformaties. Ik stel mij voor dat, bijvoorbeeld, alle grachten gedempt zouden zijn. Dan is 'Amsterdam' Amsterdam niet meer. Conclusie: de grachten behoren tot de essentie van Amsterdam. In gedachten voeg ik vervolgens Amstelveen en Amsterdam samen. Ik heb niks met Amstelveen en het is duidelijk dat voor mij deze toevoeging niets wezenlijks aan Amsterdam verandert. Conclusie: voor mij maakt het al of niet bij Amsterdam horen van Amstelveen geen deel uit van de essentie van Amsterdam. In de wiskunde kan men veel minder subjectief en preciezer, maar op een vergelijkbare manier, door middel van transformaties datgene definiëren waarom het gaat in een bepaalde meetkundige theorie.

Klein was niet alleen een goed wiskundige, maar ook een groot netwerker en organisator met een heldere visie op alles wat de wiskunde betrof, zowel het onderzoek als het onderwijs. Klein ging hard aan het werk. Onder de mensen die hij naar Göttingen haalde, bevonden zich David Hilbert (1862-1943), die in 1895 kwam, en Hermann Minkowski (1864-1909), die in 1902 werd aangesteld. In tegenstelling tot bijvoorbeeld de Berlijnse hoogleraar Kummer, die toegepaste wiskunde als smerige wiskunde ('schmutzige Mathematik') beschouwde, hechtte Klein wel grote waarde aan de toepassingen van de wiskunde. Klein schreef:

> We hebben echter tegelijkertijd een tot zelfstandig onderzoeking leidende toegepaste wiskunde nodig, omdat anders de verkeerde en verderfelijke indruk ontstaat dat de toegepaste wiskunde iets bijkomends, laags is (Tobies 1981, p. 67).

Klein en Althoff waren progressief. Ze beoogden zelfs de in die tijd politiek onhaalbare versmelting van universiteiten en technische hogescholen en ze streefden naar samenwerking tussen wetenschap, technologie en industrie. Het gevolg was dat de eerste leerstoel toegepaste wiskunde in Göttingen werd ingesteld en vanaf 1904 door C. Runge werd bezet. Interessant is in dit verband dat Althoff aan Klein de uitdrukkelijke opdracht gaf om er voor te zorgen dat meer meisjes zouden gaan studeren. Een gevolg daarvan was dat toen Klein in 1893 in opdracht van Althoff de wereldtentoonstelling in Chicago in de Verenigde Staten bezocht, hij een vrouwelijke promovenda meebracht, M.F. Winston, die in 1897 bij Klein promoveerde (Tobies 1981, p. 62).

In het bijzonder de benoeming van Hilbert tot hoogleraar in Göttingen was een gouden greep. Zeker na de dood van Poincaré werd Hilbert door velen beschouwd als de grootste wiskundige van zijn tijd en Göttingen ontwikkelde zich tot het belangrijkste centrum van de wiskundige wereld. In 1899 verscheen van Hilberts hand het meesterwerk *Grundlagen der Geometrie*. In dat boek behandelde Hilbert de grondslagen van de euclidische en niet-euclidische meetkunde. Het boek is echter meer dan een boek over meetkunde; het werk bevatte een nieuwe visie op wat een wiskundige theorie is. Die visie zou een belangrijke deel van de twintigste-eeuwse wiskunde gaan domineren. Axioma's zijn binnen deze visie géén ware beweringen over een of ander object dat buiten de theorie bestaat en dat wordt bestudeerd, neen, de axioma's definiëren het object. Hilbert deed in zekere zin niets anders dan de consequenties trekken uit de door Gauß, Riemann en anderen ingezette ontwikkeling. Met de introductie van de niet-euclidische meetkunde raakte de meetkunde haar object, de unieke fysische ruimte, kwijt. In de axioma's van de euclidische en ook de niet-euclidische meetkunde is er wel sprake van 'punten', 'rechte lijnen' en 'vlakken', maar wat dat zijn, wordt uitsluitend impliciet door de axioma's zelf bepaald. Er is een bekende anekdote over Hilbert dat hij rond 1890 met enkele collega's in Berlijn in de stationsrestauratie zat en zei: 'Men moet op elk moment in plaats van punten, rechten, vlakken, kunnen zeggen: tafels, stoelen, bierpullen' (Wußing & Arnold 1989, p. 505). Hilbert bedoelde dat het in principe niet uitmaakt welke woorden je hanteert, omdat je bij het afleiden van stellingen uit de axioma's alleen maar gebruik mag maken van datgene wat de axioma's over 'punten', 'rechten' en 'vlakken' zeggen. Natuurlijk is het zo dat wiskundigen vaak wel een extern object voor ogen hebben wanneer ze een theorie axiomatisch opbouwen. In de afleidingen mag dat externe object echter geen rol spelen; die afleidingen moeten strikt logisch verlopen.

Als we de zaken vereenvoudigen, kun je zeggen dat de overgang van de negentiende naar de twintigste eeuw ook een overgang was van het idee dat wiskunde de wetenschap is van getal en ruimte, naar het idee dat wiskunde de wetenschap is der wiskundige structuren. De traditionele euclidische ruimte en de getalstructuren zijn belangrijke voorbeelden van structuren, maar bij lange na niet de enige structuren die in de wiskunde worden bestudeerd. In principe definieert elk willekeurig gekozen axiomastelsel, waaruit zich geen tegenspraken laten afleiden, een wiskundige structuur. De eis dat het axiomastelsel consistent is – dat wil zeggen dat er zich geen tegenspraken uit het axiomastelsel laten afleiden – is dan de enige principiële beperking.

In tegenstelling tot het conservatieve Berlijn, ontwikkelde Göttingen zich tot een centrum waar de moderne structuralistische wiskunde volop werd bedreven. Een belangrijk vertegenwoordigster was Emmy Noether (1882-1935), die door velen als de grootste vrouwelijke wiskundige aller tijden wordt beschouwd. Emmy Noether studeerde in Erlangen, waar ze een van de twee meisjes was op een totaal van 986 studenten (Wußing & Arnold 1989, p. 515). In 1915 arriveerde ze in Göttingen. Ze was briljant en een habilitatie lag voor de hand. De Duitse 'Habilitationsordnung' sloot vrouwen echter uitdrukkelijk uit. Hilbert zou zijn ongenoegen hierover in de senaat van de universiteit ooit hebben geuit door op te merken dat het geslacht naar zijn mening in dit verband geen argument was. 'Een universiteit is geen badhuis [kein Badeanstalt]', zou hij hebben gezegd. Pas nadat met de val van het keizerrijk in 1918 de Habilitationsordnung was opgeheven, kon Noether in 1919 habiliteren (Wußing & Arnold 1989, p. 517). Ze werd beroemd door haar bijdragen aan de algebra. De bekende Nederlandse wiskundige Van der Waerden, een leerling van Noether, schreef over haar werk: 'Alle betrekkingen tussen getallen, functies en operaties worden eerst dan transparant, geschikt voor generalisatie en werkelijk vruchtbaar, wanneer ze van hun speciale object worden losgemaakt en tot algemene begrippelijke relaties worden teruggevoerd' (Op. cit. p. 516). Dit is met betrekking tot de algebra precies de structuralistische boodschap: je moet de structuur losmaken van de speciale situatie waarin je haar aantreft en haar in abstracto axiomatisch bestuderen; alleen dan ben je vruchtbaar bezig. Van der Waerden is beroemd geworden met zijn tweedelige boek *Moderne Algebra* uit 1930-1931. In de negentiende eeuw was algebra nog voornamelijk de leer van het oplossen van vergelijkingen. In de twintigste eeuw ontwikkelde de algebra zich tot de wetenschap der algebraïsche structuren. Van der Waerdens boek heeft daarbij een grote rol gespeeld.

De boodschap dat wiskunde de wetenschap is der wiskundige structuren waarbij een structuur axiomatisch wordt gedefinieerd, is met grote kracht uitgedragen door de in 1935 in Frankrijk door een aantal prominente wiskundigen in het leven geroepen Bourbakigroep. De groep manifesteerde met een lange rij invloedrijke leerboeken van de hand van ene Nicolas Bourbaki. Achter dat pseudoniem gingen bijvoorbeeld André Weil, Jean Dieudonné en Henri Cartan schuil. Men bedenke echter dat – ondanks haar grote invloed – de structuralistische visie niet door alle belangrijke wiskundigen werd gedeeld. Een van de allergrootste Nederlandse wiskundigen, Luitzen Egbertus Johannes Brouwer (1881-1966) huldigde een heel andere opvatting over wiskunde.[4]

7.5 DE RELATIVITEITSTHEORIE

Hoewel er ook elders in de wereld wiskunde werd bedreven, laten vrijwel alle belangrijke ontwikkelingen in de wiskunde en de theoretische natuurkunde uit de eerste decennia van de twintigste eeuw zich relateren aan Göttingen. Een zeer spectaculaire ontwikkeling in de natuurkunde van de twintigste eeuw was de introductie van de relativiteitstheorie door Albert Einstein (1879-1955). Einstein publiceerde de basisideeën van de 'speciale relativiteitstheorie' – zoals men haar later ging noemen – in 1905 in een artikel in de *Annalen der Physik*. De implicaties van die theorie waren enorm: fundamentele concepties met betrekking tot hoe de werkelijkheid in elkaar zit, werden plotseling op losse schroeven gezet.

> Stel, u en ik kopen alle twee een goed horloge. Als we vervolgens onze horloges gelijk zetten, uiteengaan en elkaar een poosje later weer ontmoeten, dan wijzen onze horloges dezelfde tijd aan. U en ik kunnen ons op geheel verschillende plaatsen bevinden, maar als onze klokjes echt goed zijn dan wijzen ze almaar dezelfde tijd aan. Tot en met de negentiende eeuw ging men er in de natuurkunde uit van datzelfde idee: tijd is absoluut en niet afhankelijk van wie die tijd meet en waar hij wordt gemeten. Einsteins speciale relativiteitstheorie impliceert dat tijd niet absoluut is: als twee mensen zich ten opzichte van elkaar bewegen, dan lopen hun klokken niet synchroon meer. Je merkt dat echter pas bij hele hoge snelheden. Een voorbeeld: als u zich met de halve lichtsnelheid, dat is 150.000 kilometer per seconde ten opzichte van mij beweegt en ik laat door middel van een lichtflits weten dat er bij mij één seconde is verstreken, dan zult u constateren dat het moment van de flits voor u, na één en een kwart seconde valt.

In de speciale relativiteitstheorie kijkt men naar referentiekaders, gerepresenteerd door assenstelsels, die met een constante snelheid ten opzichte van elkaar bewegen. De formules voor de zogenaamde Lorentztransformaties[5] maken het mogelijk om uit te rekenen op welke plaats (x', y', z') en tijdstip t' binnen referentiekader Σ', een lichtflits wordt waargenomen, die in referentiekader Σ op plaats (x, y, z) en tijdstip t wordt gezien. Als de beweging in de richting van de x-as plaatsvindt, zien die formules er als volgt uit:

$$x' = (x-vt)/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = (t-(v/c^2)x)/\sqrt{(1-v^2/c^2)}$$

In Göttingen maakten de artikelen van Einstein grote indruk. Ook Minkowski[6], bij wie Einstein in Zürich nog college had gelopen, bestudeerde het artikel over de relativiteitstheorie grondig. Zijn mathematisch oog zag in de Lorentztransformatie formules een groep van transformaties die vier onafhankelijke getallen x, y, z en t overvoeren in vier andere onafhankelijke getallen x', y', z' en t'. Het is niet vreemd dat hij daarbij aan het werk van wiskundigen als Riemann en Klein dacht en de nieuwe theorie interpreteerde met behulp van de resultaten die de negentiende-eeuwse meetkunde had opgeleverd. Minkowski redeneerde als volgt: ruimte en tijd vormen binnen elk referentiekader een vierdimensionale ruimte, waarbij de tijd de vierde dimensie is. Verder gaat het dan om de vraag welke dingen invariant zijn onder de groep van Lorentztransformaties. Een prominente invariant is overigens de lichtsnelheid.

Dit idee heeft Minkowski verder uitgewerkt. Een 'gebeurtenis', bijvoorbeeld uw aanwezigheid op de plek waar u nu dit artikel leest, is een 'punt' in een vierdimensionale ruimte. Die ruimte noemt Minkowski de 'wereld'. Als we die gebeurtenis gaan lokaliseren in ruimte en tijd, dan hebben we een assenstelsel nodig met vier assen: drie voor het ruimtelijk aspect en een voor het tijdsaspect. In die vierdimensionale ruimte wordt het leven van een persoon (of een elementair deeltje) gerepresenteerd door middel van een 'wereldlijn'. De wijze waarop de wereldlijn van een bepaald elementair deeltje wordt waargenomen, hangt af van het assenstelsel. De Lorentztransformaties beschrijven de manier waarop die verschillende wijzen van waarnemen met elkaar samenhangen.

Zo'n tien jaar na de introductie van de speciale relativiteitstheorie bedacht Einstein de algemene relativiteitstheorie. Hij zag daarbij af van de beperking dat assenstelsels zich ten opzichte van elkaar met constante snelheid bewegen. De algemene relativiteitstheorie is een stuk ingewikkelder dan de speciale. Opmerkelijk is het volgende citaat uit een belangrijk artikel van Einstein uit 1916:

> De veralgemenisering van de relativiteitstheorie werd vereenvoudigd door de vorm die Minkowski aan de speciale relativiteitstheorie had gegeven. Hij was de eerste wiskundige die duidelijk de formele equivalentie van de ruimte- en tijdcoördinaten inzag; dit maakte de constructie van de (algemene) theorie mogelijk.'

Eigenlijk zegt Einstein hier dat de negentiende-eeuwse wiskunde die Minkowski gebruikte essentieel was om tot een formulering van de algemene relativiteitstheorie te komen. Het citaat illustreert hoe abstracte structuren uit de koker van de zuiver wiskundige plotseling een grote externe relevantie kunnen hebben. In de algemene relativiteitstheorie wordt het heelal beschreven als een vierdimensionaal continuüm.

Het spectaculaire karakter van de relativiteitstheorie wordt heel duidelijk als men zich realiseert dat de theorie impliceert dat het reizen in de tijd fysisch mogelijk is. Een astronaut die een lange reis maakt, daarbij hoge snelheden ontwikkelt en vervolgens op aarde terugkeert, reist eigenlijk naar de toekomst, want zijn klok gaat iets langzamer dan de klok op aarde. Met de huidige technologie is het niet mogelijk om meer dan fracties van seconden naar de toekomst te reizen. Het gaat echter om het principe. Heel spectaculair is dat men er zelfs in is geslaagd om aan te tonen dat binnen het kader van de relativiteitstheorie ook reizen naar het verleden mogelijk zijn. Het exploreren van dit soort mogelijkheden is overigens alleen maar mogelijk met wiskunde.

We zagen boven al dat Göttingen eind negentiende en begin twintigste eeuw een waar Mekka voor wiskundigen was. Het kleine stadje werkte als een magneet. Van heinde en ver trokken wiskundigen naar Göttingen om er enige tijd te studeren. Onder hen waren ook vele Nederlanders. Getalenteerde studenten gingen na hun studie als het enigszins kon een poosje naar Göttingen. Sommigen van hen verkregen uiteindelijk een positie aan een universiteit, maar lang niet iedereen. Neem Piet Mulder. Mulder studeerde van 1896 tot 1908 wis- en natuurkunde bij Kluyver en Lorentz en daarna een jaar in Göttingen. Na terugkeer werkte hij een aantal jaren bij een verzekeringsmaatschappij. In 1917 promoveerde hij bij Fred Schuh in Groningen en van 1919 tot 1943 was hij leraar wiskunde en kosmografie aan het Stedelijk Gymnasium in Gorinchem. Mulder had na zijn verblijf in Göttingen soms nog contact met de grote wiskundige Hermann Weyl, die hij daar had leren kennen. Op 29 juli 1910 schreef Weyl aan Mulder:

> Ik verheug me er natuurlijk op dat Lorentz naar Göttingen komt. De belangstelling voor electrodynamica en electronentheorie is onder wiskundigen zo groot, dat Lorentz, die die dingen grotendeels heeft geschapen, vast veel meer succes zal hebben dan destijds Poincaré. Tegenover de door Minkowski verder ontwikkelde relativiteitstheorie is men hier op het ogenblik tamelijk kritisch gestemd, namelijk wegens de moeilijkheden die het binnen de relativiteitstheorie definiëren van het analogon van het vaste lichaam in de oude mechanica [pogingen van Born, Noether en anderen] veroorzaakt, iets wat je voor de fundering van de elasticiteitstheorie klaarblijkelijk nodig

hebt. Bovendien zijn de experimentele fundamenten enigszins zwak om er een zo radicale omkering van de natuurkunde op te baseren. Wat er bij de grote wirwar die nu binnen de fysische grondvoorstellingen overheerst uiteindelijk uit zal komen dat overziet nu waarschijnlijk nog geen mens. Natuurlijk zal het voor mij ook een zeer groot genoegen zijn met Lorentz persoonlijk in contact te komen (Collectie W.C. Mulder, 's-Gravenhage).

Het citaat tekent de sfeer aardig: een heel beroemde Lorentz, Minkowski die zich op de relativiteitstheorie had geworpen en ook de onzekerheid met betrekking tot waar de nieuwe resultaten allemaal toe zullen leiden.

7.6 WISKUNDIGE MODELLEN BUITEN DE EXACTE NATUURWETENSCHAP

We hebben in het voorafgaande gezien hoe interne ontwikkelingen binnen de wiskunde bij Hilbert en anderen tot een structuralistische opvatting van de wiskunde hebben geleid. De veelheid van structuren impliceert in principe ook een veelheid van toepassingsmogelijkheden. Traditioneel vond de wiskunde toepassing in de natuurwetenschap; de toepassing in de relativiteitstheorie ligt in het verlengde daarvan. De eerste belangrijke toepassingen van de wiskunde buiten de natuurwetenschappen waren in het verzekeringswezen.[7] In de twintigste eeuw is het aantal toepassingsgebieden van de wiskunde echter enorm gegroeid. Dat sloot goed aan bij de onder meer door Göttingen vertegenwoordigde visie op de wiskunde, maar het had ook ettelijke andere oorzaken. Veel toepassingen van de wiskunde zijn tegenwoordig toepassingen van de mathematische statistiek. De wortels van die toepassingen liggen in de negentiende eeuw bij geleerden als de Belg Adolphe Quetelet en de Engelsman Francis Galton, die beseften dat ook in de biologie en de sociale wetenschappen een wiskundige behandeling van de verschijnselen mogelijk is. Pas in de twintigste eeuw komt de ontwikkeling van de mathematische statistiek en haar toepassingen echt op gang. Een belangrijke notie, die in de twintigste eeuw populair wordt, is die van het 'wiskundig model'. Daarbij wordt het begrip model gebruikt in de zin van een een bepaald deel van de werkelijkheid (bij benadering) representerende, wiskundige en dus abstracte constructie, die vaak met een stelsel vergelijkingen correspondeert. Die nieuwe toepassingen van de wiskunde leidden ook tot het ontstaan van nieuwe disciplines.

Het is in dit verband fascinerend dat de fysicus Paul Ehrenfest (1880-1933), die in 1912 hoogleraar was geworden in Leiden, belangstelling ontwikkelde voor problemen uit de economie. Hij schreef in maart 1918 aan Einstein:

> Gedurende de laatste paar maanden ben ik totaal gefascineerd geraakt door enkele zeer duidelijke problemen uit de theoretische economie, en ik heb diep gelezen en veel nagedacht over dit hele complex van vragen.

Het is natuurlijk niet toevallig dat in 1929 onze landgenoot Jan Tinbergen bij Ehrenfest promoveerde op een proefschrift getiteld *Minimumproblemen in de natuurkunde en de economie*. De economische wiskundige modellen van Tinbergen vormden het fundament van een nieuwe discipline: de econometrie. In een artikel van 1938 gaf Tinbergen het volgende voorbeeld:

> De volgende economische grootheden worden beschouwd:
> L het arbeidersinkomen,
> Z het niet-arbeidersinkomen, kortweg 'winst' te noemen,
> U de waarde der verkochte consumptiegoederen,
> V de waarde der verkochte investeringsgoederen.
> De volgende betrekkingen worden aangenomen tussen deze grootheden, welke alle worden gemeten als afwijkingen van een bewegend evenwicht.
> (1)De winstvergelijking […]
> $Z = U + V - L$
> (2)[…] een vertraging aangenomen van één tijdseenheid […]
> $V_t = \beta Z_{t-1}$
> (3)[…] de uitgaven voor consumptiegoederen […]
> $U_t = L_t + \varepsilon_1 Z_{t-1} + \varepsilon_2 (Z_{t-1} - Z_{t-2})$
> (Dit voorbeeld is ontleend aan Alberts, 1998, p. 124)

Tinbergen kreeg voor zijn werk een Nobelprijs en na de Tweede Wereldoorlog werd hij de eerste directeur van het Centraal Planbureau. Beleidsmakers hebben altijd behoefte aan inzicht in het kwantitatief effect van concrete beleidsvoorstellen. Een van de taken van het Centraal Planbureau is het maken van wiskundige macro-economische modellen, waarmee analyses cijfermatig kunnen worden onderbouwd.

7.7 DE GRONDSLAGEN VAN DE WISKUNDE: INTUÏTIONISME VERSUS FORMALISME

We hebben in het bovenstaande gezien dat een wiskundige theorie consistent moet zijn, dat wil zeggen dat het niet mogelijk mag zijn om er een tegenspraak uit af te leiden. In de eerste helft van de twintigste eeuw is er binnen de wiskunde nogal wat aandacht voor het grondslagenonderzoek. Onder meer onder invloed van de opvattingen van L.E.J. Brouwer – wiens uitgangspunt dat wiskunde bedrijven neer komt op het uitvoeren van mentale constructies tot gevolg had dat men niet onaanzienlijke delen van de klassieke wiskunde zou moeten verwerpen – concentreerde het onderzoek zich op pogingen om de consistentie van de theorie van de natuurlijke getallen te bewijzen. Ik zal daarover een enkele opmerking maken.

We beschouwen natuurlijke getallen als rijtjes eenheden. Dus:

1 = •, *2* = ••, *3* = •••, *4* = ••••, *5* = •••••, *et cetera*

De lezer kan hierbij aan het achter elkaar leggen van knikkers denken, maar het gaat in feite om een mentaal gebeuren, waarbij we ook over getallen kunnen praten die groter zijn dan het aantal knikkers waarover we beschikken. Door het toevoegen van een eenheid aan een getal, krijgen we het volgende getal. Daarmee kunnen we eindeloos doorgaan, al kunnen we nooit alle natuurlijk getallen op deze manier construeren. De vraag is nu of men de verzameling van alle natuurlijke getallen mag beschouwen als een afgesloten gegeven geheel waarop men de regels van de klassieke logica gewoon kan toepassen. Brouwer zei in feite: neen, dat mag niet! Hilbert vond dat het wel mocht, al moet nog bewezen worden dat zo'n handelwijze nooit tot tegenspraken kan leiden.

Dat we hier echt met een kwestie te maken hebben, kan men inzien als men bedenkt dat er in de klassieke wiskunde van wordt uitgegaan dat voor een willekeurige eigenschap E geldt dat er maar twee mogelijkheden zijn: alle natuurlijke getallen hebben eigenschap E, of er is tenminste één natuurlijk getal dat de eigenschap niet heeft. Waarom zou dat bij een oneindige verzameling echter zo zijn? Bij eindige verzamelingen kan men in gedachten alle elementen van de verzameling langslopen en kijken of ze de eigenschap E hebben. Als men klaar is, dan is het duidelijk: ze hadden allemaal eigenschap E of we hebben een element ontmoet dat de eigenschap E niet heeft. Omdat we een oneindige verzameling niet in gedachten kunnen langslopen, zit er een vermetel element in de veronderstelling dat daar zulke logische wetten ook gelden.

We zullen de situatie aan de hand van een voorbeeld uiteenzetten. Volmaakte getallen zijn per definitie natuurlijke getallen die gelijk zijn aan de som van hun delers, als het getal zelf niet als een deler wordt gezien. Voorbeelden van volmaakte getallen zijn 6 en 28. Immers 6=1+2+3 en 28=1+2+4+7+14. Het volgende volmaakte getal is 496. Er zijn in totaal slechts enkele tientallen volmaakte getallen bekend, allemaal even. Het is niet bekend of er volmaakte oneven getallen bestaan. Laat VO(x) betekenen dat x een volmaakt, oneven natuurlijk getal is. Dan geldt voor een klassiek wiskundige de volgende bewering: ‘voor alle n is VO(2n+1) onwaar, of er is ten minste één n waarvoor VO(2n+1) waar is’ (daarbij varieert n over de natuurlijke getallen). Als een klassiek wiskundige als Hilbert er dan ook in zou slagen om te laten zien dat de veronderstelling ‘voor alle n geldt VO(2n+1) is onwaar’ tot een tegenspraak leidt, heeft hij daarmee het bestaan van een volmaakt oneven getal bewezen. Voor een intuïtionist als Brouwer zou zo’n bewijs echter onacceptabel zijn en wel om de volgende reden. Voor een intuïtionist is wiskundige waarheid equivalent met mentale construeerbaarheid. Een intuïtionist zal nooit het bestaan van een volmaakt oneven getal aanvaarden als hij of zij niet over een mentale constructie beschikt waarmee dat getal (in principe) geconstrueerd kan worden. Klassieke existentiebewijzen uit het ongerijmde waarbij wordt aangetoond dat de veronderstelling dat een wiskundige entiteit niet bestaat tot een tegenspraak leidt, leveren meestal geen constructie van die entiteit en zijn dus intuïtionistisch niet aanvaardbaar.

Na de Eerste Wereldoorlog bleek dat een consequent intuïtionisme impliceerde dat grote stukken van de klassieke wiskunde op zijn minst opnieuw bewezen dienden te worden. Tegenover het intuïtionistische onderzoeksprogramma van Brouwer, formuleerde Hilbert zijn ‘formalistisch programma’, dat tot doel had de klassieke wiskunde te redden. Kern van dat formalistische programma was dit: bewijs de consistentie van de klassieke wiskunde met behulp van middelen waarop de intuïtionistische kritiek geen vat heeft. De eenvoudigste theorie waarbij het probleem speelt, is de theorie van de natuurlijke getallen: de Peano-arithmetiek. Het formalistische programma kwam wat betreft de Peano-arithmetiek hierop neer: vertaal de Peano-arithmetiek in een formeel systeem, dat wil ruwweg zeggen in een verzameling formules met daarbij (in principe door een machine uitvoerbare) afleidingsregels. Toon vervolgens met de voor een intuïtionist aanvaardbare bewijsmiddelen aan, dat binnen het formele systeem geen formules die een tegenspraak uitdrukken af te leiden zijn (men toont dan de formele consistentie van het systeem aan).

De tweekamp tussen beide programma's eindigde als volgt. In eerste instantie leed Hilbert een nederlaag toen in 1931 Kurt Gödel zijn twee beroemde onvolledigheidsstellingen publiceerde. De eerste onvolledigheidsstelling was: 'Indien een de Peano-arithmetiek omvattend formeel systeem formeel consistent is, dan is er een formule A in de taal van het formele systeem waarvoor geldt dat i) A onder interpretatie waar is, ii) A niet afleidbaar is in het systeem, en iii) de negatie van A evenmin afleidbaar is in het systeem.' De tweede onvolledigheidsstelling klinkt als volgt: 'Indien een de Peano-arithmetiek omvattend formeel systeem formeel consistent is, dan is de formule die die formele consistentie uitdrukt binnen het systeem niet afleidbaar'.

De tweede stelling komt erop neer dat een bewijs van de consistentie van de Peano-arithmetiek sterkere middelen vereist dan de Peano-arithmetiek zelf en dus ook sterkere middelen dan die van de intuïtionistische bewijsvoering. Men kan dit resultaat duiden als zijnde in het voordeel van het intuïtionistische programma. Toch heeft het uiteindelijk niet zo gewerkt. Het intuïtionisme heeft grote invloed gehad, maar de klassieke wiskunde is niet verslagen. Integendeel, achteraf kunnen we zeggen dat het intuïtionisme de klassieke wiskunde juist heeft gestimuleerd. Aan de degelijkheid van de Peano-arithmetiek wordt meestal niet getwijfeld en na Gödel hebben wiskundigen zich op andere manieren verder overtuigd van de degelijkheid van die theorie. Tevens hebben resultaten als die van Gödel tot een veelheid van andere fascinerende resultaten geleid.

NOTEN

1. Voor de Grieken waren de Beothiërs de barbaren bij uitstek.
2. Riemanns verhandeling is tamelijk technisch. Mijn uiteenzetting is in vergelijking daarmee zeer oppervlakkig. Het idee van meerdimensionale meetkunden vinden we overigens in dezelfde periode bij de wiskundigen Cayley en Graßmann. Het duurde tot het eind van de negentiende eeuw voordat het algemeen ingang vond.

3. Het woord ‘groep’ wordt in de wiskunde met een precieze betekenis gebruikt. Een groep van transformaties is een collectie transformaties die de ‘groepsstructuur’ bezit. Het belang van die structuur is ook in de negentiende eeuw ingezien. In de negentiende eeuw is algebra nog voornamelijk de leer van het oplossen van vergelijkingen. In de twintigste eeuw heeft de algebra zich ontwikkeld tot de wetenschap der algebraïsche structuren, waarvan de groepsstructuur een heel fundamentele is.
4. Naar de mening van Brouwer komt het bedrijven van wiskunde neer op het uitvoeren van mentale constructies. Het object van de wiskunde werd door Brouwer als intuïtief gegeven beschouwd. Ik beveel hierbij van harte Van Dalens de biografie van Brouwer ter lezing aan (Van Dalen, 2001).
5. De transformatieformules zijn afkomstig van onze landgenoot Lorentz, die ze echter heel anders – conservatiever, meer in de lijn van de negentiende-eeuwse natuurkunde – interpreteerde dan Einstein.
6. Minkowski was berucht onder de studenten om zijn moeilijke en slecht gegeven colleges (Pyenson, 1985, p. 22). Ook Einstein was niet van Minkowski als docent onder de indruk (Pyenson, 1985, p.80).
7. De carrière van bovengenoemde Piet Mulder is zeer representatief. Lange tijd konden wiskundigen buiten de universiteit slechts in het verzekeringswezen of op middelbare scholen emplooi vinden. Die situatie is op dit moment volledig veranderd.

LITERATUUR

Alberts, G., *Jaren van Berekening, Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskundebeoefening* 1945-1960, Amsterdam University Press, 1998.

Einstein, Albert, *Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie*, Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig, 1916.

Dalen, Dirk van, *L.E.J. Brouwer, 1881-1966. Een biografie*. Uitgeverij Bert Bakker, 2001.

Miller, Arthur I., *Albert Einstein's Special Theory of Relativity, Emergence (1905) and Early Interpretation (1905-1911)*, Addison Wesley Publishing Company, Inc. Reading Massachusetts, 1981.

Minkowski, Hermann, *Gesammelte Abhandlungen von Hermann Minkowski, Herausgegeben von David Hilbert unter Mitwirkung von Andreas Speiser und Hermann Weyl*, Leipzig, 1911., Reprinted, two volumes in one, New

York, N. Y. Chelsea Publishing Company, 1967.

Pyenson, Lewis, *The Young Einstein*, *The advent of relativity*, Adam Hilger Ltd, Bristol and Boston, 1985.

Tobies, Renate, *Felix Klein*, *Biographien hervorragender Naturwissenschaftler, Techniker und Mediziner*, Band 50, Teubner Verlagsgesellschaft, Leibzig, 1981.

Wußing & Wolfgang, *Biographien bedeutender Mathematiker, Eine Sammlung von Biographien*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1989.

8

Wiskunde in de laatste zestig jaar – exponentiële groei en structurele vernieuwing

Tom H. Koornwinder

8.1 Inleiding

Bij veel niet-ingewijden heerst de mening dat de wiskunde af is. Men is verbaasd te horen dat professionele wiskundigen een deel van hun werktijd besteden aan onderzoek naar nieuwe zaken, zoals het formuleren en bewijzen van nieuwe stellingen. Deze misvatting is niet zo verwonderlijk. Vergelijk de publiciteit die de sterrenkunde, natuurkunde en DNA-gerelateerd onderzoek in de wetenschapsbijlagen van de kranten krijgt met de aandacht voor de wiskunde. Wel heeft de krantenlezer rond 1993 uitgebreid kunnen lezen over de laatste stelling van Fermat. Ook nieuwe records bij het uitrekenen van de decimalen van π en bij factorisatie van grote getallen halen de krant. Maar het overgrote deel van de nieuwe wiskunde klinkt niet door en is vaak ook inderdaad moeilijk in begrijpelijke vorm aan de leek te presenteren. Wat dat betreft hebben de wiskundigen het met hun abstracte materiaal, dat bovendien sterk voortbouwt op eerdere resultaten, veel moeilijker dan hun collega's in de natuurwetenschappen.

Uiteraard kampte de schrijver van dit hoofdstuk ook met bovengenoemde problemen. Om de lezer gevoel bij te brengen voor het belang van nieuwe wiskundige ontwikkelingen, moeten de betreffende begrippen eigenlijk tot in enig technisch detail worden uitgelegd. Dan kom je al gauw tot een omvang van honderden in plaats van twintig pagina's. Ik heb er daarom voor gekozen veel aandacht te besteden aan andersoortige aspecten van de nieuwe wiskundige ontwikkelingen: trends en nieuwe werkvormen. Eén onderwerp, de Lie-theorie, behandel ik wat uitvoeriger om de dynamiek van de (vooral zuivere) wiskunde te illustreren, waarbij steeds verdergaande verbanden tussen deelgebieden van wiskunde worden gelegd. En waarbij nieuwe ideeën zoals kwantisatie en deformatie over een breed front en gedurende lange tijd richtinggevend kunnen zijn.

8.2 GROEI VAN DE WISKUNDE

Voor een betere indruk van de groei van de wiskunde zal ik nu enige indicatoren van groei bespreken, namelijk de groei van het aantal deelgebieden, van het aantal publicaties per jaar, en van het aantal tijdschriften. Een belangrijke bron voor dit soort gegevens zijn de reviewtijdschriften oftewel databases zoals *Mathematical Reviews* (de online versie heet *MathSciNet)* en *Zentralblatt für Mathematik*. Beide pretenderen een tamelijk dekkende documentatie van alle verschijnende wiskundepublicaties te geven.

Groei van het aantal deelgebieden

Het is interessant om de opdeling in vakgebieden in 1945 en in 2000, zoals gehanteerd door *Mathematical Reviews*, met elkaar te vergelijken. In 1945 zijn er 12 hoofdonderwerpen, waarvan enkele nog licht vertakt zijn. Dit betreft vooral de analyse, waarbinnen 17 deelgebieden worden onderscheiden.

In 2000 is het aantal onderwerpen op het eerste classificatieniveau gegroeid tot 62 (er zitten nog twee niveaus onder). Van deze 62 staan er 13 op zichzelf. De overige 49 kunnen gegroepeerd worden in 5 hoofdgebieden: algebra (12 onderwerpen), analyse (19), meetkunde (7), stochastiek (2), mathematische fysica (10). In de vergelijking tussen 1945 en 2000 valt direct op dat de algebra en meetkunde in 2000 meer zijn opgedeeld terwijl de analyse in dit opzicht tamelijk constant is gebleven. Volledig nieuwe vakken sinds 1945 bij de algebra zijn categorie-theorie en K-theorie.

In de meer toegepaste gebieden is het cluster mathematische fysica flink gegroeid. Uiteraard zijn er nieuwe gebieden gerelateerd aan de computer: 'computer science' en 'information & communication'. Toch doet het aantal clusters of rubrieken waarbij al in de naam een toepassing wordt genoemd, geen recht aan het hedendaagse aandeel van toegepaste wiskunde in de totale wiskunde. In feite bevatten veel onderdelen van analyse (zoals gewone en partiële differentiaalvergelijkingen), van de combinatoriek (dat wil zeggen discrete wiskunde), maar ook van de getaltheorie een groot aandeel toegepaste wiskunde.

Discussie van de relatieve groei van deelgebieden

De genoemde verschuivingen in aantallen deelgebieden van analyse, algebra, meetkunde en toegepaste wiskunde geven een zekere indicatie van de daadwerkelijke relatieve verschuivingen in onderzoeksactiviteit binnen de hoofdgebieden. De vraag naar een verklaring komt dan op. Het hoofdgebied van de analyse stond al sinds Newton veruit nummer een. Het is moeilijk om zo'n eeuwenlange voorsprong vol te houden. Sinds de wiskunde in de tweede helft van de negentiende eeuw een grote sprong voorwaarts maakte in gestrengheid, is de analyse sneller uitgekristalliseerd dan algebra en meetkunde. Daardoor was de dynamiek van algebra en meetkunde in de laatste decennia groter. Aanvankelijk was na 1945 de verwerking van de methodes uit de functionaalanalyse, en zeker ook de distributietheorie, een krachtige motor voor de analyse in haar geheel, en ook voor de theorie van de Lie-groepen (continue symmetriegroepen) en voor de mathematische fysica. Vanaf eind jaren zeventig werden de impulsen uit de algebra en meetkunde echter krachtiger, vooral in de mathematische fysica, en ging ook omgekeerd de natuurkunde nieuwe ideeën leveren aan de algebra en vooral de meetkunde.

Algemener kan gesteld worden dat de doorbraken in de wiskunde van de laatste decennia, meer dan eerder in de twintigste eeuw, tot stand kwamen door combinatie van ideeën en technieken uit verschillende hoofdgebieden. De Engelse wiskundige Andrew Wiles bijvoorbeeld gebruikte in zijn bewijs van het 'Vermoeden van Fermat' (de laatste stelling van Fermat), wat een getaltheoretisch resultaat is, technieken uit algebra, meetkunde en analyse. Dit maakt de vraag in welk hoofdgebied de meeste activiteit is, minder relevant: het gaat om het samengaan van twee of meer hoofdgebieden.

Wat de toegepaste wiskunde betreft, was bij Newton en nog lang daarna de toegepaste wiskunde eigenlijk toegepaste analyse, er was geen echt onderscheid tussen zuivere en toegepaste analyse. De toepassingen liepen vooral via lineaire differentiaalvergelijkingen. De enorme hoeveelheid toepassingen van andersoortige wiskunde heeft zich pas goed doorgezet sinds de Tweede Wereldoorlog. De spectaculaire groei van de toegepaste wiskunde had zijn start ongetwijfeld vanwege deze oorlog, toen alle expertise, dus ook die uit de wiskunde, werd aangegrepen om de oorlogsinspanningen te ondersteunen. De grote successen hierbij werden natuurlijk niet onmiddellijk na de oorlog vergeten. Men ging de expertise opnieuw inzetten ten behoeve van het economische herstel na de oorlog en ten behoeve van de wapenwedloop vanwege de koude oorlog. Meer geld en meer faciliteiten voor toegepaste wiskunde leidden tot meer output. Maar ook was er bij een deel van de wiskundigen een sterkere motivatie om toepassingsgericht werk te doen.

Een andere trend is de relatieve groei van de discrete wiskunde ten opzichte van de continue wiskunde. De overgang van continu naar discreet is ook sterk waarneembaar in de ontwikkeling van de techniek en daardoor in de hele maatschappij. Al lang geleden gingen we over van rekenliniaal naar zakjapanner. Onze oude vaste telefoon was een continu apparaat, de mobiele telefoon is discreet. Displays gaan steeds meer over van wijzers naar digitale aanduiding. Thans breekt de digitale televisie door. De digitale computer is al lang een aanjager van deze ontwikkeling. Omdat zijn input en output digitaal zijn, ligt het voor de hand om de input discreet voor te bereiden en de output discreet te verwerken, in plaats van een vertaalslag tussen discreet en continu te maken. De informatica, als wetenschap die de processen in de computer bestudeert en de programmatuur ontwikkelt, is van nature discreet. Binnen de wiskunde betekent de ‘discretisering’ terreinverlies voor de analyse en de meetkunde, beide typisch continue vakken, en terreinwinst voor de algebra, een discreet vak. Toch loopt dit niet zo’n vaart omdat de ideeën uit de analyse en de meetkunde ook in discrete en eindige context gebruikt kunnen worden. Eindige meetkunde is een erkend vakgebied. Op grafen kan men heel goed analyse bedrijven. In feite is het heen en weer gaan tussen continu en discreet al een oude gewoonte in de analyse. Weerbarstige oneindige sommaties benadert men met integralen om de krachtige technieken van de integraalrekening te kunnen gebruiken. Omgekeerd benadert men integralen numeriek door ze te vervangen door eindige sommaties.

Groei van het aantal artikelen

Een kwantitatieve indruk van de groei van de wiskunde kan men krijgen uit het aantal publicaties dat per jaar vermeld wordt in *MathSciNet*. Hierbij wordt voor het gemak alles geteld waar auteursnamen aan verbonden zijn, dus ook boeken en overzichtsartikelen. Via andere bronnen, zoals het nu elektronisch toegankelijk gemaakte *Jahrbuch der Mathematik* kan men een indruk krijgen van de wiskundeproductie in de negentiende eeuw en de eerste decennia van de twintigste eeuw. Twee Amerikaanse auteurs, Andrew Odlyzko (1995) en Jerrold Grossman (2002), zich beiden baserend op gegevens van *Mathematical Reviews*, geven schattingen van het aantal wiskundepublicaties per jaar, zoals zich dat in de laatste decennia ontwikkelde. Odlyzko gaat zelfs terug tot 1870, toen er ongeveer 840 publicaties waren. In 2000 waren dit er ongeveer 55.000. De groei van het aantal wiskundepublicaties per jaar in deze periode van 130 jaar was niet gelijkmatig. Sinds 1945 is de groei sterk toegenomen. Gedurende enige decennia was er zelfs een verdubbeling van het aantal publicaties in elke tien jaar. Sinds circa 1985 is de groei minder sterk. De gegevens worden echter vertroebeld doordat *Mathematical Reviews* minder artikelen is gaan verwerken uit bezuinigingsoverwegingen.

Odlyzko schatte in 1994 het totale aantal wiskundepublicaties op ongeveer een miljoen. Inmiddels zouden dat er al anderhalf miljoen zijn. Zo'n 90% van de totale menselijke wiskundeproductie verscheen na 1945. In het hypothetische geval van constante groei van het aantal publicaties (thans niet meer geldig) geldt dat er in het aantal jaren van de verdubbelingsperiode, zeg tien jaar, evenveel gepubliceerd wordt als in alle jaren daarvoor.

Een interessant fenomeen is de toenemende samenwerking in het wiskunde-onderzoek, die zich laat aflezen aan het percentuele aantal publicaties met meer dan één auteur (Grossman, 2002). In de jaren veertig had slechts 9% van de publicaties meer dan één auteur, in de jaren negentig is dit 46% geworden: 33% heeft twee auteurs, 10% heeft drie auteurs en 3% heeft meer dan drie auteurs.

Is er een verklaring voor deze laatste ontwikkeling? En hoe verloopt zo'n samenwerking die leidt tot een artikel met meer dan één auteur? Een deel van de verklaring is dat de verschaffers van onderzoeksgelden de experimentele natuurwetenschappen namen als het meest succesvolle voorbeeld van hoe een wetenschap zich kan ontwikkelen en dat als norm stelden voor andere wetenschappen: de theoretische bètawetenschappen, maar ook de sociale en geesteswetenschappen. Terwijl bij een experimentele natuurwetenschap de omvang van het experiment op een natuurlijke wijze het aantal hierbij betrokken onderzoekers bepaalt, werden voor de theoretische wetenschappen financiële prikkels ingebouwd die het samenwerken stimuleerden.

Er is echter ook een meer positieve verklaring. Samenwerking kan bij wiskundig onderzoek echt helpen om verder te komen. Verzamelde expertise kan tot nieuwe inzichten leiden. De contacten worden in toenemende mate gefaciliteerd door internationale instituten, die of vele korte conferenties organiseren, of wat langere gefocuste programma's met geselecteerde deelnemers.

Bij meer auteurs kan zich het uiteindelijke schrijven van het artikel op allerlei manieren voltrekken. Vaak schrijft een van de auteurs een eerste versie, waarna deze door een medeauteur wordt becommentarieerd en bewerkt. Soms ook neemt ieder van de auteurs een deel van het artikel voor zijn rekening, overeenkomend met zijn expertise.

Andere vormen van groei

Het aantal publicerende wiskundigen bedroeg circa 10.000 in de jaren 1940, 50.000 in de jaren 1960 en 200.000 in de jaren 1990 (Grossman, 2002). Ook hier eerst een verdubbeling in minder dan tien jaar en later een afzwakking van de groei. Ik verwacht dat het aantal wiskundigen in de westerse wereld zich zal stabiliseren of zelfs zal teruglopen, gezien het geringe aantal studenten. Wereldwijd is er misschien voorlopig nog een stijging wegens het enorme potentieel van China en andere landen in de derde wereld.

Het aantal wiskundetijdschriften is sinds 1945 sterk gegroeid. Terwijl de oudere tijdschriften meestal algemeen wiskundig waren, zijn de meeste nieuwere tijdschriften gespecialiseerd op één deelgebied. Vanaf 1995 verandert de tijdschriftensituatie ingrijpend, enerzijds doordat bibliotheken de abonnementsprijzen niet meer kunnen opbrengen ('serials crisis'), anderzijds door de technologische ontwikkelingen, waardoor tijdschriften nu via het web toegankelijk kunnen worden gemaakt. Dit heeft geleid tot nieuwe, gratis of goedkope, elektronische tijdschriften. Er is nog veel dynamiek en onzekerheid in de verdere ontwikkeling van de wetenschappelijke tijdschriftenmarkt.

8.3 NIEUWE WISKUNDE ROND 1945

Tijdens de Tweede Wereldoorlog rekruteerden de oorlogvoerende partijen veel wetenschappers, waaronder wiskundigen, voor onderzoek dat de oorlogsinspanningen moest ondersteunen. Vooral het militaire onderzoek in de Verenigde Staten en Groot-Brittannië leidde tot nieuwe takken van wiskunde:

- De *operations research* werd ontwikkeld om de logistiek van de massale militaire operaties efficiënter te maken.
- *Control theory* was nodig in verband met geleide projectielen.
- Veel militaire zaken (bijvoorbeeld de ontwikkeling van de atoombom) gaven aanleiding tot grootschalig rekenen, dat nauwelijks meer te doen was met de klassieke tafelrekenmachines. Dit gaf een krachtige impuls aan de ontwikkeling van de digitale computer.

De reeds bestaande gebieden mathematische statistiek en cryptografie kregen in de oorlog een grote stimulans.

Sommige nieuwe richtingen ontstonden tijdens of kort na de oorlog, maar tamelijk onafhankelijk van de oorlogsinspanningen. Ik noem de 'speltheorie', die ontstond met het invloedrijke boek *Theory of games and economic behavior* van Von Neumann en Morgenstern, en de 'informatietheorie' (Shannon, 1948). In de zuivere wiskunde ontwikkelde Laurent Schwartz 'de distributietheorie' (1944-1945).

8.4 EEN MOMENTOPNAME: HET ICM 1954 TE AMSTERDAM

Het ICM (International Congress of Mathematicians) wordt eens in de vier jaar gehouden. Op het tweede congres in de serie, in 1900 in Parijs, presenteerde Hilbert zijn beroemde lijst van open problemen. Sinds 1936 worden er *Fields medals* op deze congressen uitgereikt, twee tot vier per keer, aan wiskundigen jonger dan veertig jaar.[1] Zij worden wel beschouwd als het equivalent voor de wiskunde van de Nobelprijs. Maar de vereiste jonge leeftijd en de betrekkelijk snelle toekenning na het verkrijgen van de wetenschappelijke resultaten, zijn natuurlijk zeer verschillend van de gang van zaken bij de Nobelprijzen.

In 1954 viel Nederland de eer te beurt om het ICM te organiseren. Het werd in Amsterdam gehouden. Volgens oudere Nederlandse wiskundigen die (toen jong) aan het congres deelnamen en bij de organisatie waren betrokken, was het een zeer geslaagd congres, niet het minst voor de Nederlandse wiskunde. De organisatie ging met veel elan gepaard. Zeer vele jonge Nederlandse wiskundigen kregen een grotere of kleinere taak toebedeeld.

Het is interessant om in de 'proceedings' van het congres sommige voordrachten na te lezen. Allereerst is er de openingsvoordracht van congresvoorzitter J.A. Schouten in het Amsterdamse Concertgebouw. Hij sprak in het perspectief van de nog vers in het geheugen liggende Tweede Wereldoorlog en de wederopbouw, maar veel van zijn woorden zijn thans nog verwonderlijk actueel. Hij zei dat 'het nu absoluut duidelijk was dat de plaats van de wiskunde in de wereld volledig veranderd is na de Tweede Wereldoorlog. Veel wiskunde van allerlei aard, van de eenvoudigste schoolrekenkunde tot de hoogst ontwikkelde theoretische onderdelen, is nodig in de moderne maatschappij, in oorlog en in vrede. De voorspelling van Felix Klein is uitgekomen dat alle zuivere wiskunde vroeg of laat een praktische toepassing vindt.' (En hoeveel meer is dat nu, weer vijftig jaar verder, uitgekomen.) Schouten betreurde het dat de intuïtieve kant van de wiskunde bij het onderwijs minder nadruk krijgt dan de formele, logische kant, waardoor de scholieren worden afgestoten.

De organisatie van dit ICM in Amsterdam spoorde ook goed met de ontwikkeling die in Nederland in gang was gezet met de oprichting van het Mathematisch Centrum (thans CWI) in Amsterdam in 1946. Een opkomend besef van het maatschappelijke belang van (toegepaste) wiskunde en van wiskundig modelleren (zie Alberts, 1998) had mede tot deze oprichting geleid.

David van Dantzig, chef van de afdeling Statistiek van het Mathematisch Centrum, hield een plenaire voordracht over *Mathematical problems raised by the flood disaster 1953*. Deze watersnoodsramp van een jaar tevoren had aanleiding gegeven tot onderzoeksopdrachten aan het Mathematisch Centrum, die de wetenschappelijke basis zouden leggen voor de Deltawerken. De onderzoeksvragen waren van drieërlei aard: statistisch, besliskundig en toegepast analytisch.

J. von Neumann hield een plenaire voordracht over *Unsolved problems in mathematics*. De organisatoren hadden gehoopt op een lezing vergelijkbaar met die van Hilbert in 1900. Uiteindelijk concentreerde Von Neumann zich op de betekenis van *operator-algebra's* voor kwantummechanica, logica en waarschijnlijkheidsrekening.

Ter gelegenheid van het congres werd een tentoonstelling in het

Stedelijk Museum te Amsterdam georganiseerd met het grafische werk van M.C. Escher: 'which shows many mathematical tendencies and is connected in a remarkable way with the mathematical way of thought'. Escher was met de wiskundig aansprekende grafiek pas later in zijn carrière begonnen, en dit werk was in 1954 nog niet erg bekend. De tentoonstelling leidde tot een ontmoeting tussen de Canadese meetkundige H.S.M. Coxeter en Escher, en een verdere briefwisseling. Coxeter inspireerde Escher tot zijn serie van *Cirkellimieten* (vullingen van het hyperbolische vlak).

Ook de toen nog jonge Roger Penrose en zijn vader Lionel Penrose bezochten deze Escher-tentoonstelling en waren er diep van onder de indruk. Het inspireerde hen tot de publicatie in 1958 van een artikel over onmogelijke figuren, zoals de 'Penrose Triangle' en de 'Penrose Stairway', die vervolgens weer in het werk van Escher terugkwamen (Penrose & Penrose, 1958). Roger Penrose werd later onder meer bekend bij het grote publiek door zijn 'Penrose-betegelingen', die veel aandacht kregen in de columns van Martin Gardner in de *Scientific American*.

8.5 WISKUNDE EN DE COMPUTER

De computer, althans zijn niet-fysische aspecten, en de computerwetenschap (informatica, computer science) zijn kinderen van de wiskunde, inmiddels volwassen of volwassen wordend. Op zijn beurt heeft de computer een enorme invloed gehad op de ontwikkeling en de beoefening van de wiskunde. Ik noem een paar aspecten.

Turing bedacht de Turing-machine als een theoretisch model voor de ideale computer. Dit model is thans werkelijkheid geworden. De meesten van ons hebben er een op hun bureau staan of dragen hem als laptop met zich mee. Er is nu een vergelijkbare ontwikkeling rond de kwantumcomputer. Deze bestaat nog voornamelijk in theorie, afgezien van een paar primitieve implementaties. Maar men is al vergevorderd met algoritmes voor zeer snelle berekeningen op kwantumcomputers.

Von Neumann[2] was veelzijdig betrokken bij de ontwikkeling van de computer aan het eind van de Tweede Wereldoorlog. Zo ontwierp hij de architectuur van de sequentiële, programmeerbare digitale computer. Hij had veel stimulerende ideeën over hoe de numerieke wiskunde, die al heel lang bestond voor benaderende berekeningen met de hand, of met tabellen of met mechanische rekenmachines, zich kon ontwikkelen in verband met de digitale computer. Ook introduceerde hij stochastische ideeën in de numerieke wiskunde om met behulp van de 'dobbelsteen' toch nog tot realistische benaderingen te komen als dat conventioneel niet mogelijk is, bijvoorbeeld bij een integratie over zeer veel variabelen. Dit staat bekend als de Monte Carlo-methode (zie volgende paragraaf). Ook had Von Neumann een visie op de parallelle computer, op neurale netwerken, en op 'computational science' (de computer gebruikt als laboratorium). Alle hier genoemde richtingen hebben sindsdien een enorme ontwikkeling doorgemaakt en zijn van een moeilijk te overschatten praktische betekenis.

De logica, een aloude tak van wetenschap liggend tussen wiskunde en filosofie, vond nieuwe toepassingsgebieden in de informatica. Zelfs de intuïtionistische wiskunde van Brouwer kreeg hier nieuwe relevantie.

Veel zuivere wiskunde in de 'definitie-stelling-bewijs-vorm' is niet-constructief. De existentie van een object wordt bijvoorbeeld wel bewezen, maar niet hoe het geconstrueerd kan worden. Een algoritme geeft een recept van hoe dat wel kan. Uiteraard moet bewezen worden dat het recept goed doet wat het claimt. De algoritmische wiskunde heeft een enorme stimulans gekregen toen het mogelijk werd om algoritmen op de computer te implementeren. Zelfs dan, met een snelle computer, stuit men bij grotere input al snel op de grenzen van wat de computer in beperkte tijd vermag. De complexiteitstheorie komt hierbij in het spel: Hoe hangt de rekentijd af van de grootte van de input? Zijn er wellicht algoritmen denkbaar die dezelfde taak sneller verrichten? Verderop geven we hier een eenvoudig voorbeeld van.

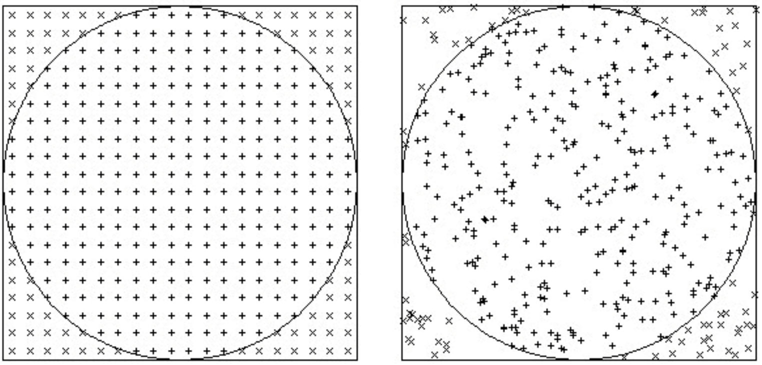
Sommige stellingen (bijvoorbeeld de vierkleurenstelling) maken voor hun bewijs essentieel van de computer gebruik. Zulke door de computer ondersteunde bewijzen ondervonden aanvankelijk veel weerstand in de wiskundige gemeenschap. Tegenwoordig is het meer geaccepteerd. Goede documentatie en reproduceerbaarheid zijn hierbij natuurlijk van belang. Een verdergaande ontwikkeling is een volledig bewijs van een stelling door de computer te laten leveren. Het kan om een bewijs van een reeds bekende stelling gaan, maar de computer zou ook nieuwe stellingen kunnen formuleren en bewijzen (waarbij het dan de vraag is of die stellingen interessant zijn). De Amerikaans-Israëlische wiskundige Doron Zeilberger schrijft dat veel stellingen in de toekomst potentieel bewezen zullen kunnen worden, maar dat hun volledige verificatie door de computer een hoge prijs in rekentijd kan hebben. Met minder rekentijd kan een bewijs tot op zekere waarschijnlijkheid gegeven worden (Zeilberger, 1993, pp. 978-981).

'Computer-algebra' houdt in dat de computer rekent met formules in plaats van met getallen. Net als bij numerieke wiskunde heeft men hier de drie aspecten van theorie, implementatie en complexiteitsanalyse. Sommig hedendaags wiskundig onderzoek speelt zich geheel af binnen de computer-algebra. Veel vaker, bijna standaard, gebruikt de wiskundige de computer-algebra als hulpmiddel bij het onderzoek, bijvoorbeeld bij het testen van vermoedens in speciale gevallen. Als de tests positief uitvallen, dan geeft dit meer motivatie om naar een bewijs te zoeken. Zelfs zonder dat een bewijs al verkregen is, kunnen resultaten van computer-ondersteund onderzoek al interessant zijn voor publicatie: de zogenaamde 'experimentele wiskunde'. De Nederlandse Nobelprijswinnaar natuurkunde M. Veltman was een pionier op het gebied van computer-algebra met zijn programma *Schoonschip*.

De Monte Carlo methode nader bekeken

Zoals welbekend, is de oppervlakte van een cirkelschijf met straal 1 gelijk aan π. We gaan die oppervlakte op een wat primitieve manier berekenen door de cirkel te leggen in een vierkant met zijden van lengte 2, om vervolgens in dat vierkant een regelmatig puntrooster te tekenen en te tellen hoeveel van die n punten binnen de cirkel liggen. Als dat aantal k is, dan is k/n een benadering van $\pi/4$ (het oppervlak van de cirkelschijf gedeeld door het oppervlak van het vierkant). In figuur 8.1 (links) is $n = 400$, $k = 316$ en de relatieve fout in de benadering is 0, 006.

Een andere manier om die oppervlakte te berekenen, is op een willekeurige manier n punten in het vierkant te tekenen en weer te tellen hoeveel van die punten, zeg k, binnen de cirkel liggen. In figuur 8.1 (rechts) is $n = 400$, $k = 322$, en k/n benadert $\pi/4$ met relatieve fout 0, 025. Herhaling van dit experiment bij vaste n zou een andere k leveren, maar gemiddeld zal k/n gelijk zijn aan $\pi/4$. De spreiding in de resultaten is afhankelijk van n: evenredig met $1/\sqrt{n}$. Dus om met deze methode een naar verwachting tien keer zo goede benadering te krijgen, moeten we honderd keer zoveel punten nemen.



Figuur 8.1: De berekening van de oppervlakte van een cirkel met een regelmatig (links) en een willekeurig raster (rechts).

Het mooie is dat de methode van oppervlaktebenadering met het plaatsen van willekeurige punten precies zo doorgaat voor andere figuren en in hogere dimensie. Zo kunnen we in drie dimensies bijvoorbeeld een bal met straal 1 (inhoud $4/3\ \pi$) leggen in een kubus met ribben van lengte 2 (inhoud 8) en de verhouding tussen beide inhouden ($\pi/6$) benaderen met k/n, waarbij k het aantal van n willekeurig gekozen punten is dat binnen de bal ligt. Ook hier is de spreiding in de resultaten weer evenredig met $1/\sqrt{n}$. Dit geldt in alle dimensies.

Bij de methode van het tellen in een regelmatig puntenrooster van $n = m^d$ punten bij een dimensie gelijk aan d, zal de relatieve fout evenredig zijn met $1/m$. Bij hogere dimensies is dat veel slechter dan met willekeurige punten. Bijvoorbeeld als $d = 20$, moeten we voor het bereiken van een twee keer zo grote nauwkeurigheid bij een regelmatig puntenrooster 2^{10}, dus ongeveer duizend keer zoveel punten nemen als eerst, en bij willekeurige punten slechts vier keer zoveel punten. Een soortgelijk principe geldt bij integratie van functies over een hoogdimensionaal gebied.

Algoritme en complexiteit: een eenvoudig voorbeeld

Stel je hebt n getallen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ en je wilt het grootste van deze getallen bepalen. Je zult dit doen (of door de computer laten doen) door een aantal malen twee getallen met elkaar te vergelijken en het grootste van die twee te bewaren. Bij bovenstaand probleem zul je dan n – 1 keer twee getallen met elkaar moeten vergelijken om tot het maximum te komen. Bijvoorbeeld vergelijken we eerst a_1 en a_2 met elkaar en vervangen a_2 door het maximum van a_1 en a_2. Dan vergelijken we a_2 met a_3 en vervangen a_3 door het maximum van a_2 en a_3. Zo doorgaande komen we in $n - 1$ stappen bij een nieuwe a_n die het gezochte maximum van de n getallen zal zijn.

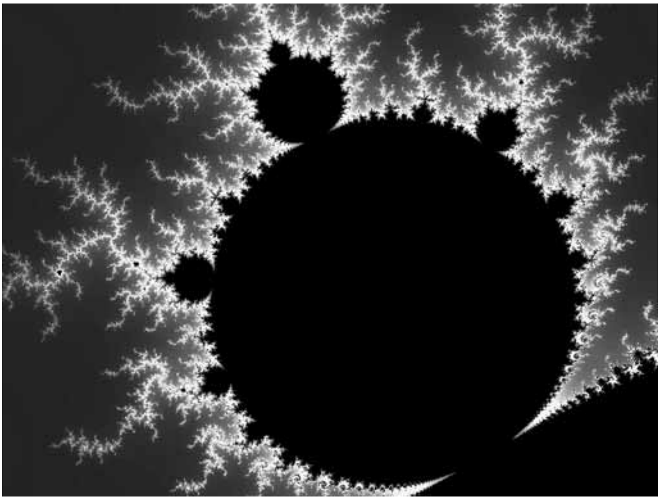
Nu willen we van de n getallen zowel de grootste als de kleinste vinden. Naïef zouden we bovenstaande methode twee keer kunnen toepassen, voor de grootste en de kleinste, dus we moeten tweemaal $n - 1$ keer twee getallen met elkaar vergelijken, dit is $2n - 2$ keer. Het kan echter slimmer, in ongeveer $\frac{3}{2}n - 2$ keer, wat precies de zuinigste methode is als n een macht van 2 is. De redenering hiervoor is: als $n = 2$ dan vinden we maximum en minimum door één keer twee getallen met elkaar te vergelijken. Dit klopt met $\frac{3}{2}n - 2$ voor $n = 2$. Stel nu dat we het maximum en minimum van $\frac{1}{2}n$ getallen vinden door p getalvergelijkingen. Dan verdelen we onze verzameling van n getallen in twee delen van $\frac{1}{2}n$ getallen en bepalen door 2 keer p getalvergelijkingen maximum en minimum M_1, m_1 van het ene deel en dito M_2, m_2 van het andere deel. Nu is het maximum van de n getallen het maximum van M_1 en M_2 en het minimum van de n getallen het minimum van m_1 en m_2. Dus we hebben $2p+2$ getalvergelijkingen nodig. Merk nu op dat uit $p = \frac{3}{2}(\frac{1}{2}n) - 2$ volgt dat $2p + 2 = \frac{3}{2}n - 2$. Dit is een zogenaamd bewijs met volledige inductie. Het type algoritme dat we hier beschreven, met herhaalde deling van de input in twee stukken, heet ‘divide and conquer’. Een beroemd wiskundig voorbeeld van zo’n algoritme is de Fast Fourier Transform (FFT).

8.6 WISKUNDIGE ICONEN

Een beperkt aantal onderwerpen uit de wiskunde heeft zoveel aandacht in de media gekregen dat bijna iedereen er van weet. Mede door karakteristieke plaatjes die er mee geassocieerd kunnen worden, hebben ze de status van iconen gekregen.

Fractals

Fractalen zijn meetkundige objecten die er min of meer eender uitzien wanneer je ze op verschillende schalen bekijkt. Een bekend voorbeeld uit de natuur is een kustlijn. Een bekend geconstrueerd voorbeeld is



Figuur 8.2: Fractals

de driehoek van Sierpinski.[3] Veel gecompliceerder ogende fractalen zijn de verzamelingen van Julia en Mandelbrot. Toch is het voorschrift van hun constructie eenvoudig. Een Julia-verzameling wordt verkregen door in het complexe vlak te itereren $z_{n+1} = z_n^2 + c$, waarbij c een vast complex getal (een parameter) is en een beginwaarde z_0 als complex getal gegeven is. De (gevulde) Julia-verzameling bestaat uit alle beginwaarden waarvoor de geïtereerde z_n begrensd blijven, dus niet naar oneindig gaan. De *Mandelbrot-verzameling* bestaat uit alle complexe waarden van c zo dat de geïtereerde $z_{n+1} = z_n^2 + c$ met $z_0 = 0$ begrensd blijven.

Fermat

Het 'Vermoeden van Fermat' luidt: is n een geheel getal > 2, dan zijn er geen positieve gehele getallen x, y, z zo dat $x^n + y^n = z^n$. Fermat (1601–1665) schreef in een wiskundeboek uit zijn bezit dat hij een bewijs voor dit resultaat had, maar dat het niet paste in de marge van dat boek.[4] Andrew Wiles kondigde in 1993 een bewijs aan van dit vermoeden. Zijn bewijs bleek nog een fout te bevatten, maar in 1994 kon hij het repareren.

Cryptografie

RSA – 130 = 1807082088687404805951656164405905566278102516769401349170127021450056662540244048387341127590812303371781887966563182013214880557 = 39685999459597454290161126162883786067576449112810064832555157243 × 45534498646735972188403686897274408864356301263205069600999044599

Velen kennen de romantische maar grimmige episode in de cryptografie tijdens de Tweede Wereldoorlog met de Enigma machine in Bletchley Park, Engeland. In 1977 introduceerden Rivest, Shamir en Adleman een geheel andere aanpak, namelijk de RSA-versleutelingsmethode die een vorm is van 'public-key cryptografie'.[5] Iedereen die wel eens een beveiligde pagina op het internet bezoekt (bijvoorbeeld bij betaling met creditcard) komt ermee in aanraking, misschien zonder het te beseffen. Bij deze methode kiest iedere gebruiker twee priemgetallen en een zogenaamde exponent en maakt alleen de exponent en het product van de priemgetallen bekend (de 'public key'). Iedereen die hem een boodschap wil sturen, vercijfert deze boodschap met behulp van het bekend gemaakte product en de exponent. Die vercijfering zit zodanig in elkaar dat alleen wie de oorspronkelijke priemgetallen kent, de boodschap kan ontcijferen. RSA Laboratories publiceren 'RSA challenge numbers': grote getallen die producten zijn van twee priemgetallen. De uitdaging is om de factoren te vinden. Het grootste tot nu toe gefactoriseerde RSA-getal is RSA-200: een getal van 200 cijfers.[6]

Pi

$\pi = 3.14159265358979323846264\ldots = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^2 = 4(1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \ldots)$. (Voor meer decimalen van π, zie de website http://mathworld.wolfram.com/Pi.html) Japanse informatici berekenden in 2002 meer dan een biljoen (10^{12}) decimalen van π. Het is al lang bekend dat π irrationaal en transcendent is, maar of π een zogenaamd normaal getal is weet men niet.

8.7 SPECTACULAIRE WISKUNDIGE TOEPASSINGEN

Er is veel meer wiskunde van belang voor ons dagelijks leven dan de iconen uit de vorige paragraaf. Alleen blijft deze wiskunde onzichtbaar. Zij zit ingebed in de hightech-apparaten die we zo graag kopen, en in de dienstverlening waar we gebruik van maken. Zonder die wiskunde zou alles veel minder goed werken, of wel goed maar veel minder efficiënt en daardoor veel duurder. Ik bespreek een paar voorbeelden.

Compressie van beeld en geluid: FFT

Wie de foto's van zijn digitale camera op een computer overbrengt, ziet bestanden verschijnen waarvan de naam eindigt op .jpg, en wie met geluidsbestanden werkt, heeft te maken met files waarvan de naam eindigt op .mp3 (maar andere suffixen voor nieuwere formaten zijn ook gangbaar). Kenmerkend voor deze bestanden is dat de formaten aanzienlijk kleiner zijn dan bij de oorspronkelijke manier van beeldopslag per pixel of van geluidopslag per fractie van een seconde. Maar ook kunnen zulke bestanden gebruikt worden om in 'real time' een video of muziekstuk af te spelen. Nog een kenmerk, alleen waar te nemen door mensen met een scherpe blik of fijn gehoor, is dat er bij deze gecomprimeerde opslag informatie verloren is gegaan, die bij het afspelen niet meer geheel terugkomt.

Slimme algoritmes liggen aan deze compressiemethodes ten grondslag, waarvoor de theorie door de wiskunde geleverd wordt. Het betreft hier vooral de 'Fast Fourier Transform' (FFT), gevonden door Cooley en Tukey (1965).[7] De Fourier-transformatie zet een geluidssignaal om in een functie die van de frequentie afhangt. Dit is een continue operatie. Voor praktische doeleinden kunnen we hem discretiseren en eindig maken. De discrete Fourier-transformatie (DFT) is nog steeds traag: de tijd om hem uit te rekenen, is evenredig met het kwadraat van de grootte van de input ($O(n^2)$). De FFT verbetert dit tot $O(n \log n)$ (maar net iets trager dan evenredig met de grootte van de input). Tot zover hebben we nog niet gecomprimeerd: alles kan in omgekeerde volgorde worden gedaan en we krijgen het oorspronkelijke bestand terug. Maar voor die frequenties waar de intensiteit laag is, kunnen we de informatie best weggooien. Zo wordt er flink bezuinigd op de bestandsgrootte.

Een verdere ontwikkeling die bij verwerking en opslag van beeld en geluid wordt gebruikt, is ‘wavelets’, een theorie die eind jaren 1980 is opgekomen (Hubbard, 1998).

CT-scans: de Radon-transformatie

Met een CT-scan (‘computerized tomography’) van een deel van het menselijk lichaam worden er van parallelle plakken beelden gemaakt. Elke plak wordt door vele, in een rechte lijn lopende, röntgenstralen doorlopen. De oorspronkelijke data zijn dus getallen, die voor al die verschillende lijnen verkregen zijn. Wiskundig kan men zich voorstellen dat elk getal verkregen is door integratie over de bijbehorende lijn. Het is dan een wiskundig probleem om de informatie over punten op die plak uit deze data te reconstrueren. Dit was analytisch al opgelost in 1917 door de Oostenrijkse wiskundige Johann Radon. Allan Cormack, gemotiveerd door de medische toepassingen en onbekend met het werk van Radon, loste het probleem rond 1960 opnieuw op en kreeg daar samen met Godfrey Hounsfield in 1979 de Nobelprijs voor Medicijnen voor.

Zoekmachines: lineaire algebra

Het succes van de zoekmachine van Google is onder meer te danken aan de manier waarop Google de zoekresultaten ordent. Deze is gebaseerd op ‘Pagerank’, een bepaald algoritme dat neerkomt op het toekennen van een ranggetal aan iedere webpagina door het oplossen van een stelsel van n lineaire vergelijkingen met n onbekenden, waarbij n in de orde van een miljard (10^9) is. Dit is het terrein van de (numerieke) lineaire algebra: op zich zeer eenvoudige wiskunde, maar gecompliceerd door de grootschaligheid.

Optieprijzen: stochastische differentiaalvergelijkingen

Het beleggen in opties evolueerde van een gok in een tamelijk rationele activiteit dank zij de ‘Black-Scholes vergelijking’ uit 1973, waarvoor de Amerikaanse econoom Robert Merton en de Canadese econoom Myron Scholes in 1997 de Nobelprijs voor economie ontvingen (Black was toen al overleden).[8] Deze formule geeft de prijs van een optie, betrekking hebbend op recht tot koop of verkoop van een aandeel op een later tijdstip voor een afgesproken prijs. De enige input van de formule die niet zonder meer kan worden waargenomen, is de volatiliteit tussen nu en het moment van uitoefenen van de optie. Hiervoor moet een voorspelling worden gedaan. De formule wordt afgeleid op basis van een stochastisch model dat de koersontwikkeling van een aandeel beschouwt als een 'Brownse beweging' (dit is de beweging van een deeltje, waarbij op elk tijdstip het deeltje in een willekeurig klein volgend tijdsinterval zich random verplaatst volgens een normale kansverdeling, die onafhankelijk is van de voorgeschiedenis van het deeltje). De bijbehorende wiskunde is die van de stochastische differentiaalvergelijkingen.

De grondslag van deze theorie van optieprijzen werd al in 1900 gelegd in de dissertatie van de Franse wiskundige Louis Bachelier, die zijn tijd hiermee ver vooruit was. Hij had ook al een notie van Brownse beweging, vijf jaar voordat Einstein hierover publiceerde en er beroemd door werd. De theorie van de optieprijzen is van groot maatschappelijk belang, denk bijvoorbeeld aan het beheer van uw pensioengelden.

Rechtspraak: forensische statistiek

Resultaten van forensisch onderzoek in verband met een misdrijf krijgen steeds meer gewicht in de rechtspraak. Veel conclusies uit het forensisch onderzoek zijn niet absoluut zeker, maar slechts met een bepaalde kans. Denk bijvoorbeeld aan DNA-onderzoek, wanneer de op de plaats van het misdrijf aangetroffen DNA-sporen matchen met het DNA van de verdachte. Hier betreden we het terrein van de forensische statistiek. Deskundige statistische rapportage in de rechtzaal, gecombineerd met enige statistisch begrip bij de optredende juristen, is van groot belang en kan grove fouten in het vonnis voorkomen (Sjerps, 2004, pp. 106-111).

8.8 WISKUNDE IN DE CULTUUR

Muziek

Reeds in de Oudheid werd er een verband gelegd tussen wiskunde en muziek, denk aan de school van Pythagoras. Het idee van de harmonie der sferen inspireerde de sterrenkunde gedurende vele eeuwen.

De composities van Johann Sebastian Bach, vooral *Die Kunst der Fuge* doen onweerstaanbaar aan wiskunde denken, hoewel de muzikale meerwaarde tot in lengte van dagen ongrijpbaar lijkt voor wiskunde of kunstmatige intelligentie. De Grieks-Franse componist Iannis Xenakis (1922-2001) gebruikte stochastische wiskundige principes in zijn composities. John Cage (1912-1992) was een andere belangrijke vertegenwoordiger van deze aleatorische muziek. Veel hedendaagse componisten geven in programmatoelichtingen aan dat zij zich bij het componeren laten leiden door een structurerend wiskundig principe, meestal met computerondersteuning. In de regel is het niet de bedoeling dat de luisteraar dit bewust hoort. Bij deze wiskundige ondersteuning zijn de fractalen erg populair. De Nederlandse componist Theo Verbeij noemde een van zijn werken *Fractale Symfonie*.

Literatuur

Het refereren aan wiskundige zaken in literaire werken is van alle tijden. Denk bijvoorbeeld aan Plato, Jonathan Swift, Edgar Allen Poe, Multatuli. Het aantal nieuwe romans, toneelstukken, films met een wiskundig thema lijkt de laatste jaren flink toe te nemen. In veel van deze werken gaat het om wiskundigen als eigenaardige, licht of ernstig gestoorde personen, soms wel erg stereotiep. Gelukkig speelt de wiskunde zelf vaak ook een rol. Sommige boeken leggen wiskundige principes in een literaire vorm uit, andere gebruiken de wiskunde. Opsporing van misdaad en sciencefiction zijn hierbij uiteraard goed vertegenwoordigd. Twee van mijn favorieten, waarbij de wiskunde niet expliciet maar wel impliciet aanwezig is, zijn *Le città invisibili* (Onzichtbare steden) van Italo Calvino (1972) en *Das Glasperlenspiel* van Herman Hesse (1943).

Architectuur

Geodetische koepels zijn benaderingen van boloppervlakken door triangulaties. Richard Buckminster Fuller (1895-1983), een Amerikaanse uitvinder, architect en ontwerper, patenteerde dit idee in 1954. Piet Hein (Denemarken, 1905-1996) propageerde de toepassing van de ‘superellips’.[9] Grillige gekromde oppervlakken doen opgang in moderne architectuur. Zie bijvoorbeeld het Opera House in Sydney en het Guggenheim Museum in Bilbao. Deze constructies werden mede mogelijk gemaakt door moderne systemen voor ‘Computer Aided Design’.

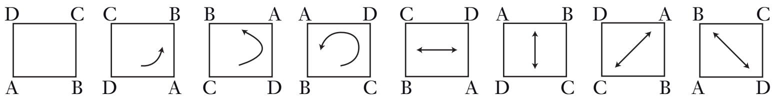
8.9 LIE-THEORIE

Om te illustreren hoe deelgebieden van de zuivere wiskunde zich ontwikkelen doordat er telkens weer nieuwe onverwachte verbanden worden gelegd met andere gebieden van wiskunde of met de theoretische natuurkunde, bespreek ik in wat meer detail de theorie van de Lie-groepen (continue symmetrieën) en de algemenere Lie-theorie die daaruit is voortgekomen. Lie-groepen zijn genoemd naar de Noorse wiskundige Sophus Lie (1842-1899).[10] Algemeen wordt de Lie-theorie gezien als een van de meest centrale onderwerpen binnen de wiskunde.

Symmetrieën en groepen

We beginnen met het begrip ‘groep’ in de wiskunde. Dit is het gemakkelijkst duidelijk te maken aan de hand van een voorwerp met enige symmetrie, bijvoorbeeld een vierkant. Een symmetrieoperatie (kortweg symmetrie) van het vierkant, beeldt het vierkant op zichzelf af zonder het te vervormen. Het vierkant heeft acht symmetrieën (zie figuur 8.3): vier draaiingen over hoeken van respectievelijk 0, 90, 180 en 270 graden (altijd tegen de wijzers van de klok in gemeten) en vier spiegelingen. Een symmetrie gevolgd door nog een symmetrie is weer een symmetrie. Bijvoorbeeld een rotatie over 90 graden gevolgd door een spiegeling ten opzichte van een diagonaal, geeft een spiegeling ten opzichte van een middellijn. Er is altijd een identiteit: de operatie die alle punten van het voorwerp op zijn plaats laat. Verder heeft iedere symmetrie een inverse: de operatie die elk punt weer terugvoert naar zijn oorspronkelijke plaats.

De verzameling G van alle symmetrieën van een object vormt een zogenaamde groep. Als g en h symmetrieën zijn, dus elementen van



Figuur 8.3: De acht symmetrieën van het vierkant.

G, dan bedoelen we met het product *gh*, de symmetrie die het resultaat is van eerst *h* en dan *g* toepassen op het object. Dus *gh* zit dan weer in *G*. Met *e* duiden we de identiteit als element van *G*, aan. Met g^{-1} duiden we het element van *G* aan dat de inverse is van de symmetrie *g*. Nu kunnen we direct inzien dat voor elementen *g*, *h*, *k* van *G* de volgende wetten gelden:

$$eg = g \text{ en } ge = g,\ gg^{-1} = e \text{ en } g^{-1}g = e,\ (gh)k = g(hk)$$

Laatstgenoemde wet beschrijft de zogenaamde ‘associativiteit’ van de vermenigvuldiging: het resultaat van eerst operaties *k* en *h* na elkaar uitvoeren, en dan nog eens *g*, geeft dezelfde operatie als eerst operatie *k* uitvoeren en dan nog eens de operatie die het resultaat is van eerst *h* en dan *g* uitvoeren. Deze wet, evenals de twee andere wetten, lijkt tamelijk flauw als het gaat om een groep *G* die uit symmetrieën is gevormd. Maar we kunnen een groep ook abstract invoeren als een verzameling *G* waarin er bij elk tweetal elementen g, *h* weer een element *gh* van *G* is, en waarin er een element *e* is, en waarin er bij elk element *g* een element g^{-1} is, dit alles zo dat bovenstaande drie wetten gelden.

We noemen een groep *G* commutatief als voor elke *g* en *h* in *G* geldt dat $gh = hg$. Commutativiteit hoeft lang niet altijd te gelden. Bijvoorbeeld de groep van symmetrieën van het vierkant is niet commutatief (ga zelf na). Een voorbeeld van een commutatieve groep is de groep van de positieve rationale getallen, dat zijn alle getallen die als breuk te schrijven zijn met positieve gehele getallen in teller en noemer. In die groep nemen we als product van twee elementen het gewone product van die twee breuken.

Lie-groepen en representaties van groepen

Laten we nu eens naar een cirkel of een bol kijken. Een symmetrie van zo’n voorwerp kunnen we continu veranderen zodat het een symmetrie blijft. Bijvoorbeeld bij de cirkel zijn de draaiingen om het middelpunt symmetrieën. We draaien over een bepaalde hoek (tegen de wijzers van de klok in). Het maakt natuurlijk niet uit als we nog 360 graden (de wiskundige zegt 2π radialen) verder draaien, maar in ieder geval vormen alle mogelijke draaiingen een continuüm. Al deze draaiingen samen vormen weer een groep. Omdat deze groep een continue structuur heeft, wordt hij een Lie-groep genoemd. Dit is wel een erg eenvoudig voorbeeld van een Lie-groep. Hij is bijvoorbeeld commutatief. Veel interessanter is de symmetriegroep van alle draaiingen van de bol. Dit is een niet-commutatieve Lie-groep.

Zodra een wiskundige een groep aangeboden krijgt, wil hij daarvan de representaties (of voorstellingen) bekijken. Hierbij wordt de groep G afgebeeld naar de groep van rotaties van een bol (mogelijk in hogere dimensie, die zelfs oneindig kan zijn). De afbeelding gaat zo dat de structuur van de groep (de vermenigvuldiging) behouden blijft. Bij een Lie-groep G moet in een representatie ook de continue structuur behouden blijven. Meestal kan een representatie worden opgedeeld in kleinere stukken (van lagere dimensie), totdat men stuit op een soort atomen: representaties die niet verder te splitsen zijn. Zulke representaties heten 'irreducibel'. Een vaste opgave voor de groepentheoreticus is om een classificatie te geven van alle irreducibele representaties van een gegeven groep. Soms is dit makkelijk, soms moeilijk, en soms nog een open probleem. Verder is dit zeker niet alleen van theoretisch belang. Sinds de opkomst van de kwantummechanica hebben de irreducibele representaties van sommige speciale groepen een directe natuurkundige interpretatie, zoals de 'spin' van een elementair deeltje.

Lie-groepen zijn niet alleen continu, ze zijn ook glad. Daarom hoort er bij elk element van een Lie-groep G een raakruimte. De raakruimte bij het identiteitselement e van G erft in het bijzonder een 'oneindig kleine' versie van de vermenigvuldiging op G. Dit resulteert in een bepaalde algebraïsche structuur op die raakruimte die het 'Lie-haakje' genoemd wordt. Zo wordt deze raakruimte een Lie-algebra $\mathfrak{g}$. Belangrijk is dat de Lie-groep G de Lie-algebra $\mathfrak{g}$ bepaalt en dat omgekeerd $\mathfrak{g}$ bijna (in ieder geval lokaal) G bepaalt. Ook is er zo'n heen en weer gaan tussen representaties van G en representaties van $\mathfrak{g}$. Deze laatste representaties zijn in zekere zin gemakkelijker: ze hoeven alleen maar een algebraïsche structuur en geen meetkundige te behouden.

Bij de Lie-groepen is er een belangrijk onderscheid tussen compacte en niet-compacte Lie-groepen. Compact wil ongeveer zeggen dat de Lie-groep een begrensde omvang heeft (nergens naar oneindig gaat) en zonder randen is. Bijvoorbeeld de groep van draaiingen van een bol (van willekeurige dimensie) is compact. Een voorbeeld van een niet-compacte Lie-groep is de groep van afstand en oriëntatie behoudende symmetrieën van het platte vlak (een groep bestaande uit draaiingen en verschuivingen). Alle irreducibele representaties van een compacte groep zijn eindig-dimensionaal. Bij een niet-compacte groep zijn er doorgaans ook oneindig-dimensionale, irreducibele representaties.

Halfenkelvoudige Lie-groepen en wortelsystemen

De representatietheorie van de compacte Lie-groepen werd al in de jaren dertig van de twintigste eeuw ontwikkeld, met name door Hermann Weyl, die daarbij sterk gemotiveerd werd door de kwantummechanica. Voor de niet-compacte Lie-groepen kwam dit echter pas op gang na de Tweede Wereldoorlog. Vooral Harish-Chandra ontwikkelde de representatietheorie van niet-compacte halfenkelvoudige reële Lie-groepen in volledige algemeenheid. Halfenkelvoudig betekent ruwweg dat de Lie-groep zelf in kleinere stukken (wederom Lie-groepen) kan worden opgesplitst, net zo lang tot men belandt bij niet verder te splitsen Lie-groepen, die men enkelvoudig noemt. In het algemeen zijn er binnen de Lie-groepen twee extreme vormen: de halfenkelvoudige en de oplosbare groepen.

Deze twee types vereisen volledig verschillende technieken. De halfenkelvoudige Lie-groepen kunnen tot de enkelvoudige worden teruggebracht en deze laatste kunnen geclassificeerd worden. Die classificatie vindt plaats door op te merken dat een halfenkelvoudige Lie-groep bepaald wordt door de bijbehorende halfenkelvoudige Lie-algebra en dat die weer wordt bepaald door een zogenaamd wortelsysteem. Dit is een veel eenvoudiger structuur: een stelsel vectoren in de n-dimensionale ruimte ($\mathbb{R}^n$) met bepaalde eigenschappen die aanleiding geven tot spiegelingen in de $\mathbb{R}^n$ die dat stelsel vectoren weer in zichzelf overvoeren. De irreducibele (niet verder te ontbinden) wortelsystemen, en dus de enkelvoudige Lie-groepen, worden aangegeven met codenamen A_n, B_n, C_n, D_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8, waaronder ze op veel plaatsen in de wiskunde opduiken. Hiermee gaat een rijke structuur van grote esthetische kwaliteit gepaard, die associaties met Bach en Escher oproept.

Deformaties en kwantumgroepen

In de jaren tachtig werden nieuwe structuren die waren geassocieerd met wortelsystemen ontwikkeld, waarbij het begrip deformatie een belangrijke rol speelt. Een deformatie is een kleine continu verlopende vervorming van een wiskundige structuur, waarbij de structuur wel tot dezelfde klasse van structuren moet blijven behoren. De vraag is dan of het vervormde object al of niet 'isomorf' is met het onvervormde object (isomorf wil zeggen: op grond van de structuur niet van elkaar te onderscheiden). Een structuur heet rigide als elk vervormd object isomorf is met het oorspronkelijke object. Halfenkelvoudige Lie-groepen zijn rigide, althans zolang men de blik niet opent voor radicalere deformaties. Dit laatste inzicht was twintig jaar geleden een enorme eye-opener, zoiets als wanneer een 'platlander' gewezen wordt op de mogelijkheden van de derde dimensie.

Om enig begrip voor die deformaties te krijgen, moet je op een nieuwe manier naar Lie-groepen, of algemener naar meetkundige objecten gaan kijken. Zo'n object is zeker ook een verzameling punten en op die verzameling kun je functies bekijken. Elke functie is een voorschrift om aan elk punt van de verzameling een getal toe te voegen. Verder moet dat voorschrift zich netjes ten opzichte van de meetkundige structuur gedragen. De functies kun je bij elkaar optellen en met elkaar vermenigvuldigen. Ook verdere eigenschappen van de structuur, bijvoorbeeld dat het een groep is, kan men herformuleren in termen van bepaalde operaties op de functies. In feite is alle informatie over die meetkundige structuur gevat in het geheel van de beschouwde functies op de verzameling, samen met de verschillende operaties die op de functies werken. Je zou de oorspronkelijke meetkundige structuur kunnen vergeten en verder kunnen gaan met deze structuur van functies. In het bijzonder zou je de functiestructuur kunnen deformeren. We constateerden dat je functies met elkaar kunt vermenigvuldigen, dat is een commutatieve operatie: de volgorde van de twee factoren doet er niet toe. Sta nu eens deformaties toe waarbij die volgorde er wel toe doet: we gaan van commutatief naar niet-commutatief. Dit principe ligt ten grondslag aan de kwantumgroepen en meer algemeen aan de niet-commutatieve meetkunde. Je beoefent een soort algebra met een niet-commutatieve vermenigvuldiging, maar aan veel zaken ken je toch meetkundige benamingen toe en je houdt associaties met een zichtbaar te maken meetkunde.

Bij de deformaties is er doorgaans een 'deformatieparameter' die vaak met q wordt aangeduid. De waarde $q = 1$ staat voor de onvervormde toestand. Door q van 1 weg te laten lopen, geeft men de deformatie aan. De parameter q werd al in de negentiende eeuw gebruikt om 'q-hypergeometrische functies' te beschrijven, deformaties van hypergeometrische functies. Deze q-hypergeometrische functies blijken ook in verband te kunnen worden gebracht met kwantumgroepen, en deze laatste hebben weer wat te maken met quantisatie in de natuurkunde. Hier is dan het wonderlijke: de negentiende-eeuwse wiskundigen kozen de letter q, die anderhalve eeuw later een prachtig passende nieuwe betekenis krijgt als de q van 'quantum'.

Enkelvoudige eindige groepen

Bij eindige groepen (dit zijn groepen met eindig veel elementen) kan met net als bij de Lie-groepen naar de 'atomen' gaan kijken: de enkelvoudige eindige groepen, die niet verder op een rechtstreekse manier opgedeeld kunnen worden. Voor eindige groepen is de classificatie van de enkelvoudige groepen veel moeilijker dan voor Lie-groepen. Naast groepen 'uit het dagelijks leven' (cyclische groepen waarvan het aantal elementen een priemgetal is en de groepen van alle even permutaties van een eindig aantal elementen) en groepen geassocieerd met wortelsystemen, zijn er ook 26 sporadische groepen (groepen die op zichzelf staan, niet in een oneindige serie voorkomen). De grootste hiervan is de monstergroep, die bestaat uit $2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^{9} \cdot 7^{6} \cdot 11^{2} \cdot 13^{3} \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$ (ongeveer $8 \cdot 10^{53}$) elementen. De classificatie van de enkelvoudige eindige groepen, in het bijzonder het bewijs dat er niet meer zulke groepen bestaan dan er nu in de lijst voorkomen, werd in de jaren zeventig verricht door een team van zo'n honderd wiskundigen. Het volledige bewijs, verspreid over boeken en vaak lange tijdschriftartikelen, omvat wel zo'n tienduizend pagina's. Sommige details zijn nog steeds niet gepubliceerd. Verder lijkt het voor een enkele persoon onmogelijk om het hele bewijs te lezen en te verifiëren. De meeste betrokkenen geloven dat de classificatie volledig en correct is. Maar dit is dan toch een ander type wiskundige waarheid dan die van onze kleinschaligere stellingen.

8.10 MATHEMATISCHE FYSICA

Van ouds is er een nauwe relatie en interactie tussen wiskunde en (theoretische) natuurkunde. In een veel geciteerd artikel spreekt E.P. Wigner over de 'unreasonable effectiveness of mathematics in physics'. De wetten van de natuurkunde zijn (door de mens) in de taal van de wiskunde geschreven, waardoor de natuurbeschrijving een grote elegantie en esthetische kwaliteit krijgt en, veel belangrijker nog, een wiskundige afleiding geboden wordt om uit de meetgegevens voorspellingen te doen die met grote precisie blijken uit te komen. Dit heeft zich onder andere voorgedaan met de klassieke mechanica van Newton, de algemene relativiteitstheorie van Einstein, de kwantummechanica, de kwantumelektrodynamica en het zogenaamde standaardmodel van de elementaire deeltjes en hun interacties. Waarom zijn het heelal en de materie juist zo, dat de wiskunde ze zo goed beschrijft? En waarom is er een grote hoeveelheid door de mens ontwikkelde wiskunde, die vroeg of laat bruikbaar is in de natuurkunde?

Hierboven was sprake van effectief gebruik van de wiskunde in de natuurkunde. Maar ook de wiskunde profiteert hiervan. De wiskunde die de natuurkundigen in gebruik nemen, en soms ook zelf bedacht hebben, is vaak wiskundig nog onbevredigend, ondanks haar effectiviteit in de natuurkunde. Dit zet de wiskundigen dan aan om daarvoor een mooie en wiskundig rigoureuze theorie te ontwikkelen, een werk dat soms tientallen jaren vergt en waar de natuurkundigen gelukkig niet op wachten. Denk aan Diracs delta-functie gevolgd door de distributietheorie van L. Schwartz, en aan de Feynman-integralen die voor de wiskundigen nog steeds een harde noot vormen.

Een nog sterkere beïnvloeding van de wiskunde door de natuurkunde werd opgemerkt door Robbert Dijkgraaf als de ‘onredelijke effectiviteit van de fysica in de moderne wiskunde’ (Dijkgraaf, 1996, pp. 255-257). Een natuurkundig geïnspireerde denkwijze, vooral geleverd door de kwantumveldentheorie, blijkt doorbraken te kunnen leveren in weerbarstige wiskundige problemen, veelal meetkundig van aard, zoals de vierdimensionale topologie.

Een zeer actief gebied in de meer speculatieve theoretische natuurkunde is de ‘snarentheorie’, die Einsteins oude droom probeert te verwezenlijken van vereniging van de krachten die op het allerkleinste niveau spelen met de tot op de grootste schalen werkende zwaartekracht. Gedreven door fysische intuïtie wordt er binnen de snarentheorie veel nieuwe wiskunde ontwikkeld. Dit gaat zover dat vanuit de snarentheorie voorspellingen worden gedaan over numerieke waarden geassocieerd met bepaalde objecten in de algebraïsche meetkunde, met name ‘moduli-ruimtes’, die vervolgens door wiskundigen bewezen worden.

8.11 MILLENNIUM PRIZE PROBLEMS VAN HET CLAY INSTITUTE

Hilbert structureerde veel wiskundig onderzoek in de twintigste eeuw met zijn lijst van 23 problemen gepresenteerd in 1900 in Parijs. Het Amerikaanse Clay Mathematics Instititute presenteerde op 24 mei 2000 in Parijs zes 'Millennium Prize Problems'. Voor de goede oplossing van elk van die problemen werd een prijs van een miljoen dollar uitgeloofd. Het enige Clay-probleem dat ook al in Hilberts lijst voorkwam, is de 'Riemann-hypothese': het vermoeden van Riemann uit 1859 dat alle niet-triviale nulpunten van de zetafunctie op een verticale lijn in het complexe vlak liggen. Dit vermoeden kan beschouwd worden als de heilige graal van de wiskunde. Bewijs ervan zou grote implicaties hebben voor de manier waarop priemgetallen gespreid liggen.[11]

In de lijst van het Clay Institute is ook 'het P versus NP probleem', van geheel andere aard maar minstens zo belangrijk. Een probleem van klasse P kan door een computer geverifieerd worden in een tijd die hoogstens een macht is van de grootte van de input (in polynomiale tijd). Bij een probleem van klasse NP kan in polynomiale tijd nagegaan worden of een gegeven oplossing inderdaad voldoet. De grote vraag is of de klasse NP echt groter is dan de klasse P. Het bekende 'handelsreizigersprobleem' is een goede kandidaat om NP maar niet P te zijn.[12] Van de zes millenniumproblemen is het 'Vermoeden van Poincaré' (een eenvoudige meetkundige karakterisering van de 3-sfeer $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$) het dichtst bij een oplossing door het werk van de Russische wiskundige Perelman.

8.12 NAWOORD

We hebben een vluchtige wiskundereis door de laatste zestig jaar voltooid. Lang niet alle topbezienswaardigheden hebben we bezocht. Het was een gouden tijd voor de wiskunde. Inhoudelijk gezien is er nog veel meer goud te verwachten, maar dat zal ook afhangen van de mensen en de maatschappij. In een somber scenario kan er over honderd jaar bijna niemand meer rekenen en begrijpt bijna niemand de wiskunde meer die ten grondslag ligt aan de algoritmen waarmee de software geschreven is waarop alle technologie gebaseerd is. Dan moet men maar wat Babyloniërs door de tijd laten reizen voor hulp, want onder hen waren zeer goede rekenaars. Laat ik toch maar inzetten op een positief bewijs van de Riemann-hypothese nog in deze eeuw.

NOTEN

1. Zie voor meer informatie over Field medals de website: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Societies/FieldsMedal.html
2. Zie voor meer informatie over Von Neumann de website: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Von_Neumann.html
3. Zie voor meer informatie over fractalen de website http://mathworld.wolfram.com/fractional.html
4. Zie voor meer informatie over Fermat de website: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Fermat.html
5. Zie http://www.cwi.nl/research/2001/TeRiele_Ned/
6. Voor meer informatie over deze versleutelingsmethode zie de website: RSA-200 http://www.loria.fr/~Ezimmerma/records/factor.html
7. Voor meer informatie over de Fast Fourier transform, zie de website: http://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform
8. Zie http://en.wikipedia.org/wiki/Black-Scholes
9. http://en.wikipedia.org/wiki/Super_ellipse
10. Zie website http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Lie.html
11. Zie voor meer informatie de website: http://www.maa.org/reviews/primeobsession.html
12. Zie voor meer informatie over het handelsreizigersprobleem de website: http://www.tsp.gatech.edu/problem/

LITERATUUR

Alberts, G., *Jaren van berekening. Toepassingsgerichte initiatieven in de Nederlandse wiskunde-beoefening* 1945-1960, Amsterdam University Press, 1998.

De macht van het getal, *Raster* nr. 100, De Bezige Bij, 2002.

Delahaye, J.P., *Het fascinerende getal Pi*, Veen Magazines, 2004.

Devlin, K., *Wiskunde: wetenschap van patronen en structuren*, Natuur & Techniek, 1998.

Dijkgraaf, R., 'De onredelijke effectiviteit van de fysica in de moderne wiskunde', *Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde*. 62 (1996), 255-257.

Gowers, T., *Wiskunde: De kortste introductie*, Het Spectrum, 2003.

Grossman, J.W., 'Patterns of collaboration in mathematical research', SIAM *News* 35 (2002), no. 9; http://www.siam.org/siamnews/11-02/collaboration.pdf.

Hubbard, B.B., *The world according to wavelets. The story of a mathematical theory in the making*, A K Peters, Wellesley, MA, 1998.

Litvak, N., 'Googling maths', *Nieuw Archief voor Wiskunde* (5) 7 (2006), no.1, 33–38.

Monastyrsky, M., *Modern mathematics in the light of the Fields medals*, A K Peters, Wellesley, MA, 1997.

Odifreddi, P., *Geschiedenis van de wiskunde in de twintigste eeuw*, Epsilon Uitgaven, 2005.

Odlyzko, A., 'Tragic loss or good riddance? The impending demise of traditional scholarly journals', *Notices Amer. Math. Soc.* 42 (Jan. 1995), 49-53; http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/doc/eworld.html.

L.S. Penrose & R. Penrose, 'Impossible objects: a special type of visual illusion', *Brit. J. Psychology* 49 (1958), 31-33.

Schwartz, L., *A mathematician grappling with his century*, Birkhäuser, 2001.

Sjerps, M., 'Forensische statistiek', *Nieuw Archief voor Wiskunde* (5) 5 (2004), no. 2, 106-111; http://www.math.leidenuniv.nl/~naw/serie5/deel05/jun2004/pdf/sjerps.pdf.

Smit, B. de, & J. Top (red.), *Speeltuin van de wiskunde. Opties, kansspelen, Escher, pi, Fermat en meer*, Veen Magazines, 2003.

Wigner, E.P., 'The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences', *Comm. Pure Appl. Math.* 13 (1960), 1-14.

Zeilberger, D., 'Theorems for a price: tomorrow's semi-rigorous mathematical culture', *Notices Amer. Math.* Soc. 40 (October 1993), 978-981; http://www.math.rutgers.edu/~zeilberg/mamarim/mamarimhtml/priced.html.

WEBSITES

Wie verder over moderne wiskunde wil lezen, kan al veel vinden op het web, bijvoorbeeld in de encyclopedische websites MathWorld en Wikipedia: Mathematics en in een History of Mathematics archive. De Nederlandstalige website www.kennislink.nl brengt actueel wetenschappelijk nieuws, waaronder wiskunde, vooral gericht op scholieren.

Jahrbuch der Mathermatik: http://www.emis.ams.org/projects/JFM

MacTutor History of Mathematics archive: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/
MathSciNet: http://www.ams.org/mathscinet
Mathworld: http://mathworld.wolfram.com
Wikipedia Mathematics: http://en.wikipedia.org/wiki/Category:Mathematics
Zentralblatt für Mathematik: http://www.emis.de/ZMATH

Index

Over de auteurs

Danny Beckers studeerde wiskunde en cultuurgeschiedenis te Nijmegen. Daarnaast volgde hij de lerarenopleiding wiskunde en was hij sinds 1993 parttime werkzaam in het voortgezet onderwijs. In 2003 promoveerde hij op een proefschrift over het wiskunde-onderwijs in Nederland rond 1800. Aansluitend bezette hij diverse academische posities. Op dit moment is hij werkzaam als universitair docent wetenschapsgeschiedenis aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Daarnaast heeft hij een eigen bureau dat zich specialiseert in de begeleiding in studie en arbeid van begaafde autisten.

Henk J.M. Bos is hoogleraar Geschiedenis van de Wiskunde (emeritus sinds juli 2005) aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht. Hij publiceerde over de basisbegrippen van Leibniz' differentiaal- en integraalrekening, over Huygens' wiskundig en wetenschappelijk werk, en over Descartes' vernieuwingen in de wiskunde. Hij schreef de monografie *Redefining Geometrical Exactness: Descartes' Transformation of the Early Modern Concept of Construction* (New York, 2001). In 1995-2006 was hij redacteur, samen met Jed Buchwald, van het *Archive for History of Exact Sciences.*

Albert Grootendorst studeerde en promoveerde te Leiden. Hij had een passie voor wiskunde en klassieke cultuur en verbleef graag en lang in zijn studeerkamer om een intrigerend probleem eerst zelf te doorgronden. Vervolgens genoot hij ervan om zijn uitwerking te presenteren, als docent (aan het Gymnasium Haganum en aan de TU Delft, waar hij in 1956 begon als instructeur en in 1989 als hoogleraar afscheid nam), in voordrachten voor zeer uiteenlopend publiek, en als auteur. Bekend zijn het analyse-leerboek dat hij samen met Meulenbeld schreef, en zijn Nederlandse en Engelse edities van oorspronkelijk Latijnse wiskundeklassiekers. Daarnaast was Grootendorst de inspirator van vele wiskundige activiteiten (MO-Examens, vakantiecursussen, samenwerking tussen historici). Hij overleed op 22 december 2004. Een 'In memoriam' met publicatie-overzicht verscheen in *Nieuw Archief voor Wiskunde* (december 2005).

Jan P. Hogendijk studeerde wiskunde en Arabische taal- en letterkunde te Utrecht. Hij was verbonden aan het History of Mathematics Department van Brown University (Providence R.I., VS) en het Institut für Geschichte der Naturwissenschaften te Frankfurt am Main, en werkt sinds 1986 aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Utrecht, en sinds 2004 ook voor een dag per week aan het Mathematisch Instituut van de Universiteit Leiden. Hij heeft gepubliceerd over de geschiedenis van de wis- en sterrenkunde in de Islamitische cultuur en de klassieke oudheid, en over de geschiedenis van de meetkunde in de zeventiende eeuw.

Machiel Keestra is filosoof en verbonden aan het Instituut voor Interdisciplinaire Studies van de Universiteit van Amsterdam. Na zijn studie wijsbegeerte (en gedeeltelijk psychologie) aan de UvA en de Karl-Ruprechts Universität Heidelberg was hij stafmedewerker van de Internationale School voor Wijsbegeerte te Leusden en vervolgens van het Studium Generale van de UvA. Hij publiceerde onder andere over Aristoteles en Hegel, taalfilosofie, rechtsfilosofie, handelingsfilosofie en tragedie. Momenteel richt zijn onderzoek zich op de filosofie van de cognitieve neurowetenschappen, waarbij menselijk handelen centraal staat. Eerdere boeken onder zijn redactie waren *Tien westerse filosofen* en *Doorbraken in de natuurkunde* – beide verschenen bij Uitgeverij Nieuwezijds.

Teun Koetsier is verbonden aan de Vrije Universiteit Amsterdam. Zijn onderzoek beweegt zich op het gebied van de geschiedenis en de filosofie van de wiskunde. Van zijn hand verscheen eerder *Lakatos*'

Philosophy of Mathematics, a historical approach (Amsterdam, 1991), en daarnaast, mede onder zijn redactie, *Word ik van filosofie een beter mens?* (Budel, 2001), *The changing image of the sciences* (Dordrecht, 2002) en *Mathematics and the Divine: A Historical Study* (Amsterdam, 2005).

Tom H. Koornwinder studeerde wiskunde te Leiden. Daarna was hij als wetenschappelijk onderzoeker in de wiskunde werkzaam op het Mathematisch Centrum (CWI) te Amsterdam van 1968 tot 1992, met een onderbreking gedurende 1970-71 aan het Mittag-Leffler Instituut in Djursholm, Zweden. Hij is hoogleraar Analyse aan de Universiteit van Amsterdam en was van 1997-2002 directeur van het Korteweg-de Vries Instituut voor Wiskunde van de UvA. Zie voor een overzicht van zijn publicaties zijn homepage http://www.science.uva.nl/~thk/.

Jan van Maanen studeerde wiskunde in Utrecht. Hij gaf wiskunde aan mavo en vwo en promoveerde in 1987 op een proefschrift over wiskunde in de Nederlanden in de zeventiende eeuw. Daarna combineerde hij het lesgeven met het opleiden van leraren, om vervolgens over te stappen naar de Rijksuniversiteit Groningen. Veel van zijn publicaties behandelen het raakvlak van geschiedenis en didactiek van de wiskunde, met name het boek *History in Mathematics Education* (Dordrecht, 2000), dat het resultaat was van een samen met John Fauvel geleide grote internationale studie. Sinds juni 2006 is hij hoogleraar didactiek van het wiskundeonderwijs en directeur van het Freudenthal Instituut aan de Universiteit Utrecht.